ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCII.

1895

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME IV.

2° Semestre

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1895

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia prima del 7 luglio 1895.

Fisica. — *Studî complementari sulla isteresi elastica dei metalli* [1]. Nota del dott. M. Cantone, presentata dal Socio Blaserna.

« Nei lavori sulla flessione dell'ottone [2] avevo mostrato come fosse opportuno di studiare l'*isteresi elastica* nei corpi sottoposti a forze torcenti; or siccome speciali ricerche vennero da me eseguite tempo fa sul nichel a questo scopo, e le altre posteriori sull'*attrito interno* [3], atteso il numero di sostanze cimentate, fornirono materia per un esame più largo del soggetto medesimo, disponevo di elementi bastevoli ad accertare da un punto di vista generale la natura dei fenomeni d'isteresi; onde mi sono accinto al lavoro di disamina su cui mi permetto di riferire in questa Nota.

« Le esperienze del primo periodo furono condotte collo stesso metodo impiegato nelle ricerche sull'attrito interno; debbo solo avvertire che ad evitare le oscillazioni del corpo in esame, quando si aggiungeva o si toglieva uno dei pesi torcenti, si trovò utile immergere per intero il carico tensore, costituito da una massa cilindrica di piombo, in un bicchiere pieno d'acqua. Se non che in seguito colla pratica acquistata nel maneggio dei pesi si ritenne superflua l'aggiunta del bicchiere, perciò se ne fece a meno nella disposizione definitiva dell'apparecchio che servì per lo studio dell'attrito in-

[1] Lavoro eseguito nel Laboratorio di fisica della R. Università di Palermo.

[2] V. Rend. Acc. dei Lincei, 2, 2° sem., p. 246, 295, 339, 385; 3, 1° sem., p. 26 e 62 (1893-94).

[3] V. Nuovo Cimento, serie IV, 1, p. 165, 1895.

terno; ed il fatto che si ebbero allora risultati della stessa natura di quelli ottenuti prima diede la migliore conferma di quanto ora venne asserito.

« L'adattamento del filo da cimentare nei pezzi cilindrici che lo collegavano al sostegno superiore ed al carico destinato a raddrizzarlo venne fatto sempre mediante saldatura. Ma si poteva garantire che lo stagno non cedesse? Per l'indole del nostro studio essendo necessario che il dubbio fosse tolto, si fece prolungare il foro assiale nel pezzo metallico che serviva per la sospensione superiore, in guisa da permettere al filo di sporgere al di sopra di questo pezzo per circa 5 cm., allo scopo di osservare mediante uno specchietto, collocato lungo tal tratto, ed un cannocchiale munito di scala, se si avessero rotazioni.

« La cosa fu accertata poichè si constatò che la porzione libera del filo girava nello stesso senso della parte sottoposta a torsione, e che ne era causa la plasticità della saldatura in quanto lo specchio portato a diverse altezze accusava fra limiti costanti di forza deformatrice spostamenti presso a poco uguali; però siccome gli angoli ottenuti per siffatta rotazione non raggiunsero i *due millesimi* del valore che corrispondeva alla lettura eseguita servendosi dello specchio inferiore, non valeva la pena di preoccuparsi della circostanza ora messa in luce.

Cicli unilaterali.

« Tutti i metalli sia nello stato crudo che dopo il ricuocimento, presentarono in modo netto i fenomeni d'isteresi, non esclusi quelli che cimentati in un campo ristretto di deformazioni per forze crescenti con continuità si discostano pochissimo dalla legge di Hooke. La base del nostro studio, tenuto conto dei nuovi elementi forniti dall'esperienze con molti metalli, rimane pertanto inalterata; vediamo ora i particolari dei diversi processi e cominciamo dall'esame dei *cicli unilaterali.*

« Per brevità voglio sin da principio denotare con P il valore di una forza torcente qualsiasi, con P_n il carico relativo all'estremo dell'*ennesimo* ciclo, con P_m il valore massimo di P_n per un serie di esperienze, e col simbolo (P· P′) il passaggio dalla forza P alla forza P′.

« Il processo che qui si studia compivasi eseguendo i passaggi: $(O \cdot P_1)$, $(P_1 \cdot O)$, $(O \cdot P_1)$, $(P_1 \cdot P_2)$, $(P_2 \cdot O)$, $(O \cdot P_2)$, $(P_2 \cdot P_3)$ ..... $(P_m \cdot O)$, $(O \cdot P_m)$, essendo $P_1 < P_2 < P_3$ ... Il sistema $(P_n \cdot O)$, $(O \cdot P_n)$ costituisce, giusta quanto altrove fu convenuto [1], un ciclo unilaterale.

« I risultati avuti per tali cicli coi diversi metalli furono della stessa indole, avendosi una cedevolezza crescente in ciascuno dei passaggi $(P_n \cdot O)$, $(O \cdot P_n)$ ed una variazione brusca di essa quando s'inverte il senso secondo cui la forza varia. Nel primo caso le reazioni elastiche si mantengono sino

[1] V. Rend. Acc. dei Lincei, II, 2° sem., p. 247.

alla fine del mezzo ciclo superiori a quelle caratteristiche della sostanza sottoposta nello stato iniziale a piccoli carichi torcenti, a partire da un valore che aumenta con n; nel secondo esse presentano variazioni meno accentuate, assumendo valori poco maggiori che operando in principio con piccole forze deformatrici.

« La chiusura dei cappî corrispondenti nel diagramma ai cicli si verifica in modo quasi completo, e la legge di deformazione per forze che crescono con continuità non è alterata sensibilmente, quando s'intercalino i cicli, per le interruzioni a questi dovute. Lo stesso accade per la interposizione dei *cicli bilaterali* (1) caratterizzati dai passaggi $(P_n \cdot - P_n)$, $(- P_n \cdot P_n)$.

« Ho fatto parola in una precedente *Nota* (2) dei cicli unilaterali compiuti a partire da O_m, cioè della deformazione permanente che corrisponde alla forza P_m, ed i risultati ottenuti operando con diversi metalli confermano nell'assieme anche per tal riguardo le precedenti deduzioni.

« Resta fra l'altro assodato che gli archi relativi ai passaggi $(O_m \cdot P_n)$ sono a leggerissima curvatura e che ciascuno di essi si discosta poco dalla linea rappresentatrice di $(O_m \cdot P_m)$, onde si può dedurre che per qualsiasi passaggio $(O_m \cdot P)$ esiste sensibilmente una legge di proporzionalità tra le forze e le deformazioni (come avea trovato il Wiedemann nelle ricerche sulla torsione (3)), con una costante che è vicinissima, sebbene un poco superiore, a quella che si ha per il filo cimentato in un campo ristretto di forze a partire dallo stato iniziale.

« Questa circostanza potrebbe sino ad un certo punto giustificare il metodo tenuto da molti fisici, i quali per togliere l'influenza delle deformazioni permanenti hanno assoggettato sin da principio il corpo in esame ad una forza superiore al limite che si proponevano di raggiungere nel corso delle esperienze. Però se la legge di Hooke in siffatte condizioni appariva verificata, nulla si poteva dire del comportamento che avrebbe assunto il corpo a partire dallo stato privo di deformazione.

« Aggiungerò ancora che in una serie di cicli $(O_m \cdot P_n)$, $(P_n \cdot O_m)$ le deformazioni permanenti, per i valori più grandi di n, tendono a crescere, e che col ritorno alla forza P_m si perviene ad una lettura un poco maggiore di quella avuta in principio; ma se si lascia agire il carico P_m per un giorno. prima di cominciare le esperienze, quelle variazioni cessano, e d'altro canto per $P_n = P_m$ si riottiene la deformazione massima iniziale. E poichè l'artifizio usato, come appresso vedremo, ha per effetto di eliminare le azioni susseguenti, vi è ragione di credere che gli spostamenti cennati sieno ad esse dovuti.

(1) V. loc. cit., p. 298.
(2) V. loc. cit., p. 595.
(3) Wied. Ann. 6, p. 490, 1879.

Cicli bilaterali

« Questi cicli si compiono d'ordinario mediante i passaggi: $(0 \cdot P_1)$, $(P_1 \cdot - P_1)$, $(- P_1 \cdot P_1)$, $(P_1 \cdot P_2)$ ..... $(P_m \cdot - P_m)$, $(- P_m \cdot P_m)$.

« I caratteri ad essi relativi sono presso a poco gli stessi per i varî metalli, in quanto le differenze che si hanno da un caso all'altro appariscono dipendenti, più che dalla natura della sostanza, dalle condizioni di plasticità del corpo in esame. Risulta infatti sempre una cedevolezza minore o maggiore che nei primordî della deformazione, a seconda che ci riferiamo al principio o al termine di un passaggio qualsiasi da un carico estremo a quello di segno opposto, con variazioni lungo il mezzo ciclo tanto più marcate quanto più cresce il valore di n; se non che, mentre d'ordinario per i cicli più bassi si ha nei diagrammi in corrispondenza ad ogni mezzo ciclo un arco che presenta un punto d'inflessione all'incirca per $P = 0$, il flesso tende a sparire a misura che n aumenta sino ad ottenersi per le più grandi ampiezze una linea figurativa del ciclo la quale presenta in tutti i punti la sua convessità al di fuori. Per i metalli meno plastici, quali il ferro ed il platino, queste condizioni finali non si raggiungono quando non si va a forze estreme assai grandi, laddove nel rame, nell'argento e nell'alluminio ricotti sin dai più piccoli valori di n si trovano reazioni elastiche sempre decrescenti dal principio al termine del mezzo ciclo.

« La chiusura delle linee che rappresentano i cicli bilaterali si verifica sempre per i valori più piccoli di n, non così per le ampiezze grandi, risultando in generale col ritorno alla forza P_n una deformazione un po' minore che nel passaggio antecedente per lo stesso carico; solo nel nichel si è potuto accertare su tal riguardo un comportamento opposto. È da notare però che ad accomodazione inoltrata si effettua in tutti i casi la chiusura.

« Il modulo medio, che per i cicli bassi coincide quasi con quello relativo alle più piccole deformazioni, al crescere di n diviene minore, variando in modo tanto più notevole quanto più grande si rivela la plasticità della sostanza.

« Come per i cicli unilaterali e bilaterali, la chiusura dei cappî si avvera nei processi di deformazione compiuti mediante i passaggi $(P_m \cdot P')$, $(P' \cdot P_m)$, dove P' denota una forza torcente qualsiasi positiva o negativa purchè minore in valore assoluto di P_m. Siccome i particolari di questi cicli risultarono in tutto conformi a quelli rilevati nello studio della flessione [1], mi dispenso dal fare sull'argomento un esame minuzioso.

Sul modo di eliminare le deformazioni permanenti.

« Il processo di *scarica* di cui feci uso nelle ricerche sulla flessione [2] fu anche applicato per la torsione, e nella maggior parte dei casi con com-

(1) V. Rend. Acc. dei Lincei, III, 1° sem., p. 62.

(2) V. loc. cit., II, 2° sem., p. 339.

pleta efficacia, giacchè si riuscì d'ordinario a togliere quasi tutta la deformazione permanente dovuta alla forza massima servendosi di alternazioni con ampiezze via via minori.

« Essendomi intanto accorto che nei casi di forte plasticità del filo vi era, dopo la *scarica alternata*, uno spostamento residuo non trascurabile nel senso corrispondente all'ultima forza P_m, pensai che potesse ciò derivare dal fatto che le successive diminuzioni di ampiezza nel processo di scarica fossero assai grandi; e mal non mi apposi, poichè con decrementi più graduali delle forze estreme si giunse a risultati migliori per il nostro scopo.

« Si vide inoltre come ad eliminare le deformazioni permanenti dovute a forze tutte dello stesso segno, riuscisse opportuno sottoporre il corpo prima della *scarica alternata* ad un carico uguale e contrario al massimo impiegato nella serie.

« Nel corso dell'esperienze col nichel, trovai che l'attuazione del metodo del quale ci occupiamo si può rendere più semplice usufruendo delle oscillazioni che si producono nel filo quando si sopprima d'un tratto il carico P_m. Mercè tale espediente fu possibile di evitare in seguito una manovra laboriosa, avendo d'altro canto, nel caso che le oscillazioni non si smorzino rapidamente un ritorno esatto del corpo allo stato iniziale. In modo diverso le cose procedono coi metalli molto pastosi: la deformazione residua è allora notevole, per cui a raggiungere in questo caso migliori effetti conviene ricorrere al metodo primitivo delle alternazioni statiche.

« Il processo di scarica qualora non si parta da deformazioni esagerate e si attui colle cautele avanti cennate, ci permette di raggiungere per il corpo condizioni di struttura che, pur essendo talvolta diverse dalle iniziali [1], si possono riguardare come normali, in quanto l'applicazione successiva del metodo porta sempre a letture coincidenti, e la legge di deformazione del corpo a partire dallo *zero di scarica* per forze che crescono con continuità in un senso o nell'altro è sensibilmente la stessa. Questo fu osservato già nello studio della flessione e le ricerche attuali ci conducono a deduzioni analoghe.

« Tralasciando di esporre i dati sperimentali relativi al primo dei fatti ora citati, e che mostrano quasi tutti come ad accomodazione inoltrata gli spostamenti dello *zero* da una serie all'altra sieno piccolissimi, mi limito per provare la seconda parte a riportare nelle tabelle che seguono i risultati di alcune serie compiute con due fili di nichel. In esse P denota il carico torcente, ω la lettura fatta al cannocchiale, e $\Delta\omega$ la differenza fra due letture successive.

(1) V. loc. cit., p. 344.

Ni_3 ricotto — TABELLA I.

P	ω	Δω	P	ω	Δω	P	ω	Δω	P	ω	Δω
0	0,8		0	0,8		0	0,8		0	0,8	
100	52,2	51,4	— 100	— 51,9	— 52,7	— 100	— 51,2	— 52,0	100	52,6	51,8
200	105,2	53,0	— 200	— 104,9	— 53,0	— 200	— 104,3	— 53,1	200	105,8	53,2
300	160,0	54,8	— 300	— 159,0	— 54,1	— 300	— 158,8	— 54,5	300	160,0	54,2
400	220,0	60,0	— 400	— 219,0	— 60,0	— 400	— 219,3	— 60,5	400	220,0	60,0
500	294,0	74,0	— 500	— 297,0	— 78,0	— 500	— 293,8	— 74,5	500	293,0	73,0
600	396,0	102,0	— 600	— 398,7	— 101,7	— 600	— 396,4	— 102,6	600	395,6	102,6

Ni_6 crudo — TABELLA II.

P	ω	Δω	P	ω	Δω	P	ω	Δω
0	3,0		0	2,9		0	2,8	
— 100	— 48,8	— 51,8	— 100	— 48,8	51,7	100	54,2	51,4
— 200	— 102,2	— 53,4	— 200	— 102,3	— 53,5	200	107,3	53,1
— 300	— 157,2	— 55,0	— 300	— 157,8	— 55,5	300	162,7	55,4
— 400	— 217,0	— 59,8	— 400	— 217,2	— 59,4	400	222,3	59,6
— 500	— 284,8	— 67,8	— 500	— 284,7	— 67,5	500	290,0	67,7
— 600	— 365,0	— 80,2	— 600	— 365,0	— 80,3	600	370,0	80,0

« Come si vede i valori di ω sono per ciascuna riga sensibilmente concordanti, e poichè le piccole divergenze fra le serie compiute con forze di segno opposto sono dello stesso ordine di grandezza di quelle che si hanno fra le serie relative a forze dello stesso segno, è da ritenere che nel primo caso ad un completo accordo non si perviene per cause disturbatrici accidentali.

« Aggiungerò che la legge di deformazione dei fili, quando si parta dallo *zero* di scarica e si proceda per forze crescenti, è per tutti della stessa natura avendosi una cedevolezza sempre maggiore coll'aumentare del carico.

« Per quanto riguarda lo stato normale, voglio ancora rilevare una circostanza. È noto che il processo di scarica non è più efficace, quando si abbiano nel corpo deformazioni esagerate, se si perviene alla torsione massima con forze crescenti solo in un senso; chè se vi si giunga con una serie di cicli bilaterali le cui ampiezze vadano man mano crescendo, è possibile arrivare al carico limite raggiunto prima senza che il corpo cessi dal deformarsi attorno una configurazione poco diversa dalla originaria, ed in tal caso la scarica alternata con forze estreme che decrescano lentamente si può applicare con successo, come è provato dall'esperienza.

« Noterò in ultimo che nel corso delle alternazioni decrescenti da P_m a *zero*, il corpo assume per le successive forze estreme presso a poco le deformazioni che ad esse corrispondono quando il filo, preso nello stato normale, compie direttamente il passaggio da *zero* a P_m. Basta a provarlo l'esame della tabella che riporto, dove con P_n s'indicano i valori delle forze estreme relative ai cicli statici decrescenti, con ω_n le deviazioni lette che loro corrispondono, e con ω gli spostamenti avuti per le forze dello stesso rigo partendo dallo *zero* di scarica ed agendo con forze crescenti.

Tabella III.

P_n	Ni_3 ricotto				Ni_4 ricotto					
	ω	ω_n	ω	ω_n	ω	ω_n	ω	ω_n	ω	ω_n
100	51,4	52,4	51,7	52,5	53,3	54,2	53,5	54,1	53,7	53,8
200	104,1	105,7	104,2	105,8	107,8	109,0	108,4	108,8	108,3	108,8
300	159,0	160,9	158,7	160,6	165,0	166,3	165,5	165,8	165,0	166,3
400	218,9	221,5	218,5	221,2	228,2	230,4	228,8	229,8	227,5	229,9
500	290,6	294,0	289,7	294,3	306,1	309,3	305,1	307,9	303,1	307,5

« L'accordo fra le ω_n e le corrispondenti ω non è rigoroso, ma ove si pensi che le ω_n decrescono in modo rapido, e ciò a causa di aversi la differenza di 50 gr. nelle successive forze estreme, dobbiamo argomentare che i risultati avuti sieno abbastanza concordanti per mostrare la tendenza alla legge avanti enunciata.

Elasticità susseguente.

« L'influenza della elasticità susseguente sui processi ciclici di deformazione venne lungamente studiata nel corso delle attuali ricerche, ed i risultati cui si giunse sono nelle linee generali analoghi a quelli ottenuti nel caso della flessione [1]. Si trovò infatti che se non si va a deformazioni oltremodo grandi, gli spostamenti Δ dovuti alla causa cennata sono sempre di tale entità da aversene effetti poco rimarchevoli nei fenomeno d'isteresi, che i valori di Δ, apprezzabili solo quando la cedevolezza del corpo si allontani alquanto dai limiti relativi alle piccole deformazioni, crescono al diminuire della resistenza del corpo alle forze deformatrici, e che in fine coll'accomodazione tendono ad annullarsi. A dir vero coi metalli molto pastosi non è facile raggiungere queste condizioni finali, tuttavia anche per essi vi ha un sensibile abbassamento dei valori di Δ col procedere del lavorìo. Una eccezione farebbe su tal riguardo il ferro, poichè si è visto aversi col filo Fe_4

(1) V. loc. cit., III, 1° sem., p. 30.

azioni susseguenti che crescono un poco col succedersi dei cicli bilaterali; ma bisogna osservare che il metallo anzidetto presenta altre anomalie nell'accomodazione, per cui il particolare citato potrebbe essere dipendente dalle stesse cause che producono i fatti altra volta esposti ([1]).

« Nei cicli unilaterali mancano le manifestazioni della elasticità susseguente, se si eccettui qualche traccia in corrispondenza dei punti estremi del ciclo; e queste tracce, quando si parta dallo stato deformato, spariscono se si ha cura di lasciare agire per un tempo lungo il carico massimo, giacchè allora, per grandi che sieno i valori di Δ ottenuti coll'applicazione di siffatto carico, non risultano valori di Δ apprezzabili. Basti il dire che con un filo di alluminio, il quale per una forza massima da cui si partì in una serie di cicli unilaterali diede come valore di Δ *30 div.* della scala, non manifestò lungo i cicli la più piccola traccia di elasticità susseguente.

Scosse.

« Rispetto alle scosse si ebbe per la torsione la conferma di quanto fu visto nello studio della flessione ([2]). Non mi è sfuggito però un particolare mai constatato nelle ricerche sull'ottone e del quale credo opportuno far cenno.

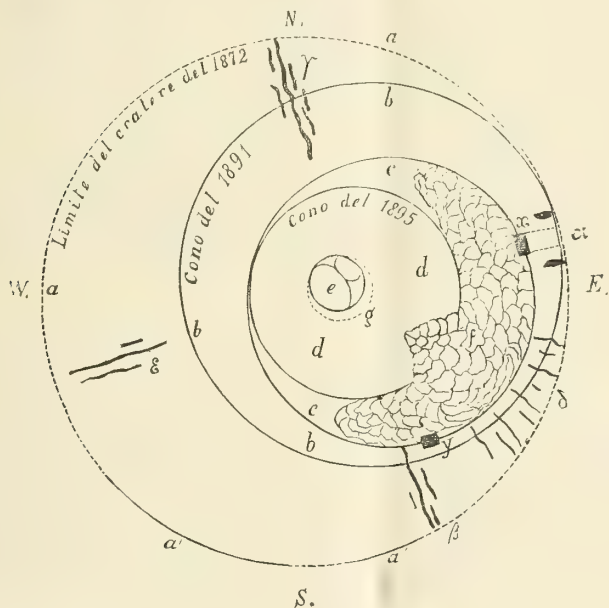
« Quando, fra i limiti di deformazione in cui risultano apprezzabili gli effetti della elasticità susseguente, coll'applicare uno dei pesi che servono a produrre il carico torcente si comunica al corpo una scossa, l'azione susseguente o manca del tutto, o si fa sentire solo qualche tempo dopo l'aggiunta del peso ed allora in grado assai minore che nelle condizioni ordinarie. Ciò fa pensare che lo spostamento dovuto alla scossa occulti la parte di deformazione che porterebbe nello stesso tempo l'elasticità susseguente, senza che per questo si agevoli, riguardo alla durata, l'assetto definitivo delle particelle ».

Geologia. *Lava pahoehoe effluita il 24 maggio 1895 dal cono terminale del Vesuvio.* Nota di Giuseppe De Lorenzo, presentata dal Corrispondente Fr. Bassani.

« Il periodo di eruzione lavica effluente cominciato al Vesuvio il 7 giugno 1891 fu ampiamente descritto da Matteucci nel suo lavoro *Sulla fase eruttiva del Vesuvio cominciata nel giugno 1891* (Atti Acc. Sc. di Napoli, ser. 2ª. vol. V) e in altre note successive (Boll. Soc. meteor. ital., ser. 2ª, vol. XII e XIV) e da Johnston-Lavis nei diversi *Reports of the Committee*

(1) V. Nuovo Cimento, loc. cit., p. 179.
(2) V. Rend. Acc. dei Lincei, III, 1° sem., p. 26.

appointed for te investigation of the Volcanic Phenomena of Vesuvius and its Neighbourhood: essi segnarono la fine del periodo di efflusso lavico e ne descrissero la transizione graduale alla moderata attività stromboliana, accennando i fenomeni da questa presentati fino alla metà di maggio del 1894, dopo di che, essendosi allontanati da Napoli, dovettero interrompere il corso delle incominciate osservazioni (1). Credo quindi opportuno segnare le modificazioni avvenute nella sommità del Vesuvio fino al 2 giugno 1895, fino a quando cioè io feci ad essa la mia ultima visita.

Sommità del gran cono del Vesuvio il 2 giugno 1895.

a, Limite del cratere del 1872 coperto dalle lave posteriormente superfluite — *a'*, Ciglio craterico scoperto del 1872 — *b*, Cono di eruzione fino al 7 giugno 1891 — *c*, Cratere di collasso formatosi dal 7 giugno 1891 a maggio 1894 e colmato gradatamente dalla successiva attività stromboliana — *d*, Cono di eruzione del 2 giugno 1895, sorto sul fondo dell' antico cratere di collasso — *e*, Cratere distoma del 1° giugno 1895 — *g*, Cratere monostoma del 2 giugno 1895 — *f*, Lava effluita il 24 maggio 1895 dai fianchi del cono eruttivo — *α*, *β*, *γ*, *δ*, Fratture del gran cono, già descritte da Lavis *x*, *y*, Dicchi di Leucotefrite nelle pareti del cratere di collasso.

« Il grande cratere di collasso, profondo 150 e largo 150-175 m., prodotto dall' efflusso lavico del 1891, è stato a poco a poco colmato dalla

(1) Scrissero anche su quel periodo eruttivo Bassani, Palmieri, Mercalli e Baratta.

moderata attività stromboliana, la quale ha anche costruito l' attuale cono di eruzione, che si eleva di una quarantina di metri sul piano del cratere del 1872 e di una trentina su quello del 1891. Esso cono eruttivo è eccentrico rispetto al cratere di collasso, perchè a west i suoi fianchi si fondono con quelli del cono del 1891, mentre a est lo separa dalla cinta amplectente un atrio falcato, il quale va gradatamente colmandosi mediante i superflussi e gli efflussi lavici e i materiali frammentari, che il vapor d'acqua espelle dal cratere con ritmo variabile e irregolare, in generale però molto rapido. Le proiezioni non avvengono verticalmente, ma obliquamente verso sud, come già Matteucci aveva osservato avvenire durante la fase stromboliana del maggio 1891. Il 24 maggio di quest' anno si ruppe a sud-est il cono di eruzione e dalla base della spaccatura effluì una colata di lava, che, fermata dall' orlo del cratere amplectente, si espanse nel piccolo atrio semilunato e continuò a sgorgare per due giorni, finchè la laceratura che le aveva liberato il passaggio non si fu cicatrizzata in dicco.

« Questa lava è constituita da una roccia eminentemente vesciculare a fondo nero, su cui spiccano porfiricamente numerosi cristalli di leucite della grossezza quasi di un pisello e di color grigio cenere. A occhio nudo si vedono qua e là rarissimi cristalli di augite piuttosto grandi; al microscopio si svelano gli altri componenti.

« La leucite si presenta in cristalli di grandezza variabile, da quelli piccoli, microscopici, granulari, agli altri grandi, in icositetraedri ben definiti, che dànno alla roccia l' aspetto porfirico: questi a preferenza di quelli sono corrosi, riassorbiti o rotti in frammenti, che sono spesso ricementati dalla base vetrosa, nel qual caso facilmente si scambiano con gli aggruppamenti icositetraedrici di vari cristalli insieme saldati. Nei cristalli maggiori si osservano chiaramente a nicols incrociati i fenomeni di polarizzazione dovuti secondo Klein alla complicata geminazione polisintetica di parti rombiche, e i vari sistemi a graticciato delle lamelle birifrangenti si dirigono in sensi diversi, secondo la direzione dei tagli: questi fenomeni di polarizzazione non si osservano bene nei cristalli più piccoli. Giusta le osservazioni fatte da Zirkel fin dal 1867, specialmente le più piccole leuciti macroscopiche e le più grandi microscopiche mostrano la molto caratteristica tendenza ad avvolgere corpi estranei e ad aggrupparli in un mucchietto centrale o in zone ottagonali e rotonde concentriche alla superficie dei cristalli: zone radiali non ho osservato nelle mie preparazioni. I corpi estranei sono specialmente aghetti e granuli gialli e verdi di augite, microliti incolori allungati di plagioclase, frammenti di sostanza vetrosa e particelle opache a scaglie di magnetite o ilmenite e di biotite; non mancano, sia nelle zone concentriche che sparse irregolarmente nella massa, inclusioni liquide, a volta provviste di libelle. Quantunque si possa in generale ritenere che l' augite abbia incominciato a separarsi dal magma prima della leucite, pure non può sostenersi la priorità

assoluta della prima rispetto alla seconda, perchè quella ingloba granuli e cristallini di questa: pare piuttosto che l'augite, già abbondantemente segregata prima che la leucite incominciasse a cristallizzare, abbia poi continuato a prodursi, forse con minore intensità, durante tutto il tempo di consolidazione di essa. Non si può in alcun modo distinguere una leucite intratellurica o di prima generazione da una leucite estratellurica o di seconda formazione, perchè nei vari cristalli non esistono delle differenze nette di grandezza o di caratteri morfologici e fisici da poterli assegnare all'una piuttosto che all'altra categoria. Dai cristalli piccoli microscopici si passa insensibilmente per gradi intermedi ai più grandi macroscopici, e in quelli come in questi si possono del pari osservare delle forme ben definite e dei fenomeni chimici e fisici dovuti all'azione del magma ambiente: se questi fenomeni sono più accentuati nei maggiori cristalli, ciò dipende solo dal fatto che essi furono per più lungo tempo esposti a quell'azione. Non esistono dunque due generazioni distinte, separate da un hiatus ben definibile, di cristalli di leucite, per i quali invece si può giustamente ripetere con Iddings: « The porphyritical crystals ..... were crystallizing while the magma was in motion and did not cease their growth after it came to rest until the whole magma had crystallized » (Bull. phil. Soc. Washington, XI, 1889).

« L'augite presenta le combinazioni abituali delle forme (100), (010), (110) e $(11\bar{1})$, che sotto al microscopio appariscono come esagoni simmetrici o come ottagoni o come quadrati con gli angoli troncati, a seconda che le sezioni sono prevalentemente verticali o trasversali e che predominano le zone dei pinacoidi o dei prismi. Quasi sempre i cristalli hanno struttura zonata, che talora si mostra con tutte le fini e numerose lamelle che la rappresentano, mentre altre volte si riduce ad una semplice differenziazione di un nucleo interno e un invoglio esterno. A causa della variabile composizione chimica dei singoli involucri si hanno nelle direzioni d'estinzione delle deviazioni, che corrispondono, come già osservò Vogelsang, a quelle dei feldspati triclini, e la deviazione massima esiste fra la direzione d'estinzione del nucleo e quella del complesso invoglio esterno. Nelle sezioni da me osservate il nucleo ha sempre esattamente la stessa forma del cristallo esterno, il che però non esclude che in altri casi possa avere forma e disposizione diverse ed essere anche un preesistente individuo corroso, come già da gran tempo è stato osservato da Bütschly e Zirkel. Contiene come inclusioni gran quantità di magnetite o magnetite titanifera, nonchè piccoli cristallini e frammenti di augite, di leucite e di plagioclase, disposti irregolarmente o anche in mucchietti o in serie lineari parallele ai contorni del cristallo. In una sezione ottagonale, perpendicolare o quasi alla zona dei prismi, che a luce naturale non presenta alcuna anomalia, a nicols incrociati si vedono benissimo due individui geminati secondo un piano parallelo all'ortopinacoide

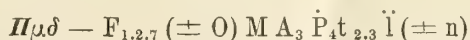
(100): la sezione quindi non dà angoli rientranti e neanche a nicols incrociati si paleserebbe per un cristallo doppio, se fra le due grosse metà del geminato non fossero interpolate delle lamelle sottilissime in posizione di geminazione polisintetica. Degli aggruppamenti complicati con angoli rientranti, osservati in altre sezioni, mi fanno supporre che esistano in questa lava anche i geminati secondo l'emipiramide ($\bar{1}22$) scoperti da Vrba, Breithaupt e Naumann. Il clivaggio avviene costantemente secondo il prisma (110) ed è rappresentato da numerose fenditure serrate e chiare, generalmente rettilinee ma spesso anche interrotte e anastomizzate, le quali nelle sezioni perpendicolari all'asse verticale formano due fasci quasi ad angolo retto, corrono parallele nelle sezioni parallele ai pinacoidi e in tutte le altre si tagliano secondo figure rombiche. Matteucci osservò che nell'augite della lava del 1891 i piani di fenditure erano paralleli a 010, ma nelle sezioni da me osservate di quella lava il clivaggio predominante dell'augite è certamente parallelo al prisma (110) e le sfaldature secondo i pinacoidi sono rarissime e incomplete. I più grandi cristalli d'augite hanno sempre contorni rettilinei nettissimi e non mostrano traccia di alterazioni chimiche o fisiche, e quindi se essi, per le loro dimensioni, dovessero considerarsi come cristalli di prima consolidazione, riuscirebbe inesplicabile la loro immunità dalle azioni alteranti della seconda consolidazione estratellurica, onde è più naturale il supporre che per l'augite, come per la leucite, non esistano due distinte fasi di consolidazione, separate da un hiatus ben definito.

« Quantunque Michel Lévy nel suo *Étude sur la détermination des Feldspaths dans les plaques minces* abbia dimostrato che il nome *Plagioclase* è troppo vago e indeterminato, pure, per le grandi difficoltà che si oppongono a un'esattissima determinazione dei vari membri della serie isomorfa calcosodica, conservo tal nome per indicare il componente feldspatico della roccia presa in esame, di cui il plagioclase rappresenta un elemento essenziale sia per la sua abbondanza che per le dimensioni dei cristalli, le quali nei maggiori individui raggiungono persino la lunghezza di 2 mm. I cristalli sono quasi sempre riuniti polisinteticamente secondo la legge dell'albite, cioè col piano di geminazione parallelo a M (010): le lamelle geminate sono irregolarissime per lunghezza e spessore e in generale sono ristrette a una metà longitudinale della sezione, mentre l'altra metà appare semplice, non lamellata; stante la lunghezza variabile delle lamine, le estremità delle sezioni assumono la caratteristica apparenza dentata o ruiniforme. Raramente alla geminazione polisintetica secondo la legge dell'albite si associa l'altra secondo la legge del periclino, la quale qualche volta si mostra pure isolata. Quantunque la gran maggioranza del plagioclase sia rappresentata da cristalli geminati, pure esiste qua e là qualche individuo semplice, nel quale può bene osservarsi la struttura zonata, che in questo caso dipende dal semplice accrescimento a pause della medesima sostanza e non

da differenza chimica delle singole zone, perchè queste non presentano differenze nei caratteri ottici. Le inclusioni liquide sono molto rare, e frequenti invece le solide, ora disordinate, ora aggruppate in zone lineari o circolari. Siccome nelle sezioni perpendicolari o inclinate a M (010) si presentano sempre angoli di estinzione maggiori o di poco minori a 30°, se ne può dedurre che il plagioclase fa parte della serie compresa tra la labradorite e l'anortite, ma questa determinazione deve essere presa, come avverte Rosenbusch, con molta cautela, perchè non si può essere sicuri del grado d'inclinazione del piano della sezione rispetto a M. L'angolo d'estinzione farebbe supporre un avvicinamento anche maggiore all'anortite che alla labradorite, come già per altre lave è stato osservato da Kreutz, Sinigallia e Rinne.

« Oltre ai tre suddetti componenti essenziali si può osservare nella roccia qualche raro cristallo di orneblenda, distinguibile pel suo forte pleocroismo, per l'angolo del prisma e per l'orlo nero granuloso segnante il primo stadio della transizione ad augite ed opacite. Abbondantissima invece e rappresentante una delle prime segregazioni del magma è la magnetite, probabilmente accompagnata dalla magnetite titanifera, dalla ilmenite e dalla biotite. Nè ad occhio nudo nè nelle lamine sottili ho osservato la nefelina, ma trattando la roccia polverizzata con HCl ho potuto ottenere delle nubecole gelatinose, che mi fanno sospettare la presenza di questo minerale, trovato prima da Rammelsberg nella lava del 1858 e poi da Zirkel in quella del 1779, del 1822 e del 1858. Come Matteucci nella lava del 1891 e Sinigallia in quella del Piano delle Ginestre del 1822, così io in questa del 1895 non ho potuto trovare traccia alcuna di olivina. Le pareti delle bolle e dei pori sono frequentemente tappezzate da ematite micacea e dalla limonite che ne rappresenta il prodotto di trasformazione.

« Dall'esame al microscopio risulta dunque che la lava effluita il 24 maggio 1895 dal cono terminale del Vesuvio ha dato, consolidandosi, una roccia a struttura porfirica, la quale, essendo constituita da leucite, augite e plagioclase come elementi essenziali e da orneblenda, nefelina?, magnetite, ilmenite e biotite come elementi accessorî, va considerata come una leucotefrite o tefrite leucitica. Ove alla formula data da Michel Lévy per le leucotefriti si tolgano le barre orizzontali, che indicano opinioni puramente subiettive sulla prima e seconda consolidazione dei minerali componenti, e si sovrappongano alle lettere dei punti per indicare la macroscopicità dei minerali che dànno alla roccia l'aspetto porfirico, la leucotefrite presa in esame può essere rappresentata dalla formula:

$$\Pi\mu\delta - F_{1.2.7} (\pm O) M A_3 \dot{P}_4 t_{2.3} \ddot{l} (\pm n)$$

« C'è però da osservare che le leucotefriti di Lévy hanno un significato più largo di quelle di Rosenbusch e Zirkel, abbracciando più razionalmente anche le leucobasaniti, le quali, in caso d'una grande abbondanza di olivina,

potrebbero invece che leucobasaniti chiamarsi leucotefriti a olivina, così come usa chiamarle Lacroix in *Les enclaves des roches volcaniques.* Riesce strano che Zirkel nella seconda edizione del suo magnifico *Lehrbuch der Petrographie* metta indistintamente tra le Leucitbasanite tutte le lave del Somma-Vesuvio, anche quelle in cui Haughton, Fuchs, Sinigallia e Matteucci non hanno trovato traccia alcuna di olivina; mentre Rosenbusch in *Mikroskopische Physiographie der massigen Gesteine* appunto per le lave del Somma-Vesuvio giustamente osserva: « Die Menge des Olivin ist immer eine kleine, so dass nur wenige Ergüsse als eigentliche Basanite anzusehen sind ». La straordinaria abbondanza di leucite dà alla roccia un carattere acido, che è in parte attenuato dal grande sviluppo assunto dal plagioclase prevalentemente basico.

« Questa leucotefrite in colata ha il caratteristico aspetto di lava a corde o lava pahoehoe, e, siccome in tutte le pahoehoe del Vesuvio da me osservate esiste una grande analogia sia nella struttura e nella composizione mineralogica che nei processi fisici e chimici, i quali hanno preceduto e accompagnato la loro eruzione, io, riserbandomi di fare in seguito uno studio più minuto su tale argomento, indicherò ora brevemente i punti principali di questa analogia, per trarne delle conseguenze, le quali, se non possono avere un valore generale per tutte le rocce eruttive del nostro pianeta, hanno però certamente un significato per le lave del Vesuvio, a cui si riferiscono.

« Lascio da parte una lava vesciculosa a corde del 1739, raccolta presso il casino del principe di Ottaiano e avente, al pari delle altre pahoehoe, struttura porfirica data dal gran predominio di cristalli di leucite mentre scarsa oltremodo è l'augite, e passo a quella del 1754. Dall'aprile del 1752 fino al 2 dicembre del 1754 il Vesuvio fu in moderata e continua attività stromboliana, con lancio di scorie e con piccoli efflussi e superflussi lavici, che non sorpassavano la cinta craterica esteriore. Il 2 dicembre 1754 il gran cono si spaccò a sud e a sud-est e dalla base delle due fenditure effluirono le due note correnti del Mauro e di Boscotrecase. La roccia che compone queste pahoehoe è vesciculosa e le pareti delle bolle e dei pori sono a volte vetrificate. La leucite di color grigio sporco non altera il color bruno della roccia ed è abbondantissima, in cristalli che variano da 1 a 5 mm. di spessore e che dànno alla roccia la struttura porfirica: scarsissima invece è l'augite, di cui secondo Fuchs si possono contare appena 5 o 6 cristalli su 6 o 7 cm. q. In identiche condizioni, cioè dopo un prolungato periodo di funzione stromboliana, il 29 luglio e il 4 agosto 1779 sgorgò verso Resina un torrente di lava quasi nera, la quale però, al pari di quella del 1754, non solo è vesciculosa, ma contiene gran quantità di cristalli di leucite e poca augite. Similmente, dopo una prolungata fase stromboliana, nell'agosto 1810 la lava sgorgò da un'apertura inferiore di una diecina di passi alla cima del cratere, empì il piccolo atrio e si riversò dal lato occidentale scor-

rendo fino al Fosso grande. Questa lava non effluita come le altre ma superfluita, è vesciculosa e contiene i più grandi cristalli di leucite fra le lave vesuviane, mentre manca quasi del tutto l'augite. Le pahoehoe sgorgate dal Vesuvio durante il moderato periodo eruttivo che va dalla fine di ottobre 1818 fino al principio del 1821, sono tutte eminentemente vesciculose e contengono abbondante leucite porfirica, mentre l'augite è scarsa. Una pahoehoe, in tutto e per tutto identica a quella da me esaminata del 24 maggio di quest'anno, fluì dal cratere terminale del Vesuvio dal 20 al 27 aprile 1845, e in generale si può dire che tutte le lave sgorganti del cratere terminale sono sempre e costantemente delle pahoehoe vesciculose, a struttura porfirica, ricchissime di leucite e poverissime di augite ([1]). Nella grande e notissima eruzione del 1855, le lave uscite dal 1 al 19 maggio furono scoriacee; quelle invece che continuarono a fluire dal 19 maggio in poi erano, secondo le esattissime osservazioni di Scacchi, a superficie unita e a corde, con struttura vesciculare, abbondantissime di cristalli di leucite porfiricamente disseminati e scarsissime di augite non visibile a occhio nudo. La magnifica colata del 1858, che rappresenta la pahoehoe tipica del Vesuvio, è altamente vesciculosa e la struttura porfirica le è data dalla leucite abbondantissima, mentre scarseggia l'augite. Tutte le lave a corde fluite nel 1859, 1860, 1861, 1868 e 1871 hanno identica struttura e composizione mineralogica. Dal più basso (Lavenkegel) dei quattro coni, che prima dell'eruzione del 26 aprile 1872 formavano la sommità del Vesuvio, sgorgava secondo Heim una lava a corde ricchissima di leucite, e lo stesso Heim fa notare che durante quell'eruzione una enorme quantità di leucite in cristalli sciolti fu eruttata dal cratere terminale, mentre la lava che contemporaneamente effluiva dai fianchi conteneva pochissima leucite e abbondava di augite. Per l'eruzione del 1891 Matteucci osserva che le lave uscite dalle bocche D e E della sua carta, cioè le più basse della fenditura, sono scoriacee, mentre le altre sgorgate dalle bocche B e C, le più alte, sono a superficie unita e a corde; ma siccome le prime fluirono per poco tempo e in poca quantità, la lava del 1891 può essenzialmente ritenersi del tipo a corde e relativamente a ciò essa è vesciculosa, a struttura porfirica, ricca di leucite e povera di augite. Della lava del 24 maggio 1895 ho già parlato, e ho aggiunto che in generale le lave sgorganti dal cratere terminale sono delle pahoehoe con la struttura e la composizione mineralogica sopra accennate.

« Dalle suddette osservazioni e da altre, che ometto di trascrivere

([1]) Questo fatto era già stato notato fin dal 1809 da L. von Buch nelle sue *Geognostische Beobachtungen auf Reisen:* « Merkwürdig ist es gewiss, dass die Ströme welche vom Krater abflossen oder nahe unter dem Rande erschienen, der Leucite eine so ungeheure Menge enthalten, dass in denjenigen hingegen, welche tief unten am Kegel ausbrachen.... Leucite durchaus fehlen. Hindert der Druck das Hervortreten der Leucite? »

stante il carattere preliminare di questa Nota, si possono dedurre i fatti seguenti:

1° Le lave pahoehoe (tipo la lava del 1858) hanno sempre una struttura vesciculare anche nella parte centrale delle colate, mentre le lave aa (tipo la lava del 1872) sono scoriacee alla superficie e compatte nella massa delle correnti, e ciò si verifica non solo nelle lave del Vesuvio, ma anche in quelle di altri punti del nostro pianeta, spingendo alla persuasione che la pahoehoe e la vescicularità hanno una medesima causa d'origine. Infatti i molti campioni di pahoehoe del Kilauea da me esaminati nel Museo di geologia dell'Università di Napoli, sono tutti eminentemente vesciculosi: io veramente non ho potuto avere campioni di aa delle Hawaii, ma Dana in *Characteristics of Vulcanoes* dice: « The aa lava is compact, usually less vesiculated than the pahoehoe..... », il che conferma i rapporti esistenti al Vesuvio fra i due tipi di lava.

2° Le pahoehoe del Vesuvio sono in generale abbondantissime di cristalli di leucite, sparsi porfiricamente nella massa microlitica, e scarsissime di augite: al contrario le aa sono quasi sempre molto ricche in augite, mentre la leucite non si vede quasi mai a occhio nudo. Questo fatto fu osservato prima di tutti da Palmieri nel 1872 e poi da Heim, ma nè l'uno nè l'altro insistettero su questa differenza nella composizione mineralogica dei due tipi di lava.

3° Le eruzioni di pahoehoe al Vesuvio sono di solito precedute da un prolungato periodo di attività stromboliana, e sono tanto effluenti quanto superfluenti, mentre quelle di aa non sono mai superfluenti ed erompono quasi sempre dalla base delle grandi spaccature del gran cono.

« Se dalla constatazione di questi nudi fatti si passa a considerazioni teoretiche sulla causa comune che li ha prodotti e si tiene conto degli studi di Scacchi sull'origine delle ceneri vulcaniche, di Heim sulla Schollenlava e la Fladenlava del Vesuvio, di Dana e di Dutton sulla pahoehoe e la aa delle Hawaii e più specialmente delle osservazioni di Johnston-Lavis sui fenomeni eruttivi del Somma-Vesuvio, contenute in *The Geology of Monte Somma and Vesuvius* e in *The Relationship of the structure of rocks to the conditions of their formation*, si giunge a una ipotesi abbastanza soddisfacente. Quando, dopo un breve periodo di attività stromboliana, si squarcia profondamente il cono, dalla base della fenditura sgorga il magma carico di H_2O e di gas, che non hanno avuto il tempo di eliminarsi lentamente e ora erompono con violenza dalla lava fluente, che solidificandosi acquista il tipo aa e imprigiona tutti i grandi cristalli di augite, segregatisi prima che la leucite acquistasse un grande sviluppo. Invece, durante una fase prolungata di moderata attività stromboliana, il magma permane bollendo (simmering magma di Lavis) nel condotto lavico e perde a poco a poco H_2O e gas; si segregano e si ingrandiscono i cristalli di leucite che dànno alla

roccia l'aspetto porfirico e, quantunque continui a generarsi altra augite, viene rifusa e riassorbita gran parte dell'augite precedentemente consolidatasi. Quando in queste circostanze avviene un trabocco di lava superfluente o il magma effluisce da una spaccatura non ampia, il vapor d'acqua e gli altri gas non hanno la forza di squarciare violentemente la corrente lavica, ma, come ben dice Dutton, « the excluded gas or vapor is mechanically entangled in the solidifying mass in the form of bubbles or vesicles », la lava si gonfia come pane lievitato, scorre con superficie unita e a corde e, solidificandosi, acquista il caratteristico aspetto di pahoehoe ».

Chimica. — *Ricerche su alcuni cementi italiani ed esteri.* Nota di G. Oddo ed E. Manzella [1], presentata dal Socio Paternò.

« Lo sviluppo rapido che ha preso in questi ultimi tempi dapertutto l'industria dei cementi e l'importanza straordinaria che vanno acquistando tali prodotti per gli usi più svariati, ci ha spinto a studiare comparativamente i cementi che si fabbricano in Italia e quelli che si fabbricano in altre nazioni.

« A questo scopo ci siamo rivolti alle più reputate fabbriche dell'Italia e dell'estero per mezzo di una circolare, nella quale, oltre a domandare i campioni dei migliori prodotti da esse preparati, accennammo lo scopo di tale richiesta e il desiderio di avere materiali freschi, in recipienti impermeabili all'umidità.

« Risposero gentilmente al nostro invito e ci fecero tenere i campioni di cementi che riportiamo le seguenti case

« d'Italia:

1. Marchino e C.i, Casalmonferrato .	1. Cemento idraulico a lenta presa. 2. Cemento a rapida presa.
2. Fabbrica di calce e cemento di Casalmonferrato.	3. Cemento Portland 1a qualita extra.
3. Società anonima Casalmonferrato	4. Cemento Portland 1a qualità, marca A. 5. Cemento Portland 2a qualità. 6. Cemento a pronta presa.
4. Filippo Gavelli, Modigliana, Toscana.	7. Cemento Portland a lenta presa. 8. Cemento romano a rapidissima presa.

« di Germania:

5. Dyckerhoff und Söhne Amöneburg bei Biebrich.	9. Cemento Portland.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico dell'Università di Palermo.

6. Schifferdecker und Söhne, Heidelberg.	10. Cemento Portland a lenta presa. 11. » » a rapida.
7. Mannheimer Portland-Cement Fabrik, Weisenau bei Mainz.	12. Cemento Portland.
« di Francia:	
8. Pelloux Père et Fils et C.ie Valbonnais, Grenoble.	13. Cemento Portland a lenta presa. 14. » » a lentisssima presa.

« Anche la fabbrica di calce idraulica e cementi di Zaccone Fornero e C. di Casale ci spedì i suoi prodotti; ma essi ci arrivarono quando le ricerche sugli altri cementi erano state incominciate da circa un mese, e fummo perciò costretti a trascurarli. A tutti i proprietarii di queste fabbriche porgiamo i nostri migliori ringraziamenti.

« I cementi appena ricevuti venivano conservati dentro larghe bocce di vetro a turacciolo bene smerigliato, per ripararli dall'azione dell'aria.

I. Prove di resistenza.

« Le prove di resistenza nei cementi servono a stabilire il valore costruttivo del materiale. Esse sono prova di resistenza alla trazione, alla pressione, alla flessione, allo sfregamento etc.

« Lo scopo del nostro lavoro non ci permette di occuparci dell'importanza tecnica di ciascuna di queste prove e dei mezzi che si sono investigati per determinarle col massimo rigore possibile; diremo soltanto che le prove alla compressione hanno, industrialmente parlando, importanza maggiore, come quelle che sottopongono il materiale agli stessi sforzi ai quali nelle applicazioni il cemento viene ordinariamente sottoposto.

« Le norme germaniche, che costituiscono una specie di capitolato ufficiale per l'industria dei cementi, dicono esplicitamente: « Siccome in pratica si desidera specialmente che i cementi oppongano resistenza alla pressione, si dovrà ritenere decisiva la prova che si fonda su tale determinazione ».

« Per questa ragione, volendo avere un dato fisico che potesse servire come termine di paragone tra i diversi prodotti, ci siamo limitati a stabilire la loro resistenza alla pressione.

« Per evitare lo studio di tutte le cause che potessero influire sulla resistenza (acqua comune, sabbia etc.) preparammo i cubi di prova, due per ogni campione, servendoci di stampi di latta e manipolando mediante una cazzuola l'impasto su una lastra di marmo con acqua distillata.

« Questi cubi furono lasciati all'aria alla temperatura dell'ambiente.

« Era nostro desiderio di sottoporre alla prova i cubi, tutti alla stessa epoca della loro preparazione; ciò non ci fu possibile, non disponendo di un apparecchio spedito, ma di una grossa leva con la quale s'impiegava molto tempo per ogni determinazione e che era, per giunta, spesso occupata in altre

esperienze. Un altro inconveniente si ebbe nel non poter usare una leva meno potente: i cementi a rapida non resistettero, meno uno, alla pressione della sola leva.

« È consigliato dalla pratica e sancito in quasi tutte le norme che le nazioni estere hanno stabilito per regolare l'industria cementizia [1], di non provocare la rottura nei cubi di prova in un cemento prima dei 28 giorni dalla preparazione: un tempo minore non è, in generale, sufficiente per giudicare della forza coesiva del materiale.

« Si è stabilito anche un periodo di tempo entro cui si può effettuare la rottura, che varia da 4 a 12 settimane e noi ci siamo attenuti a questo periodo. Si consiglia ancora di ripetere le prove dopo l'anno, e noi le abbiamo ripetute dopo otto mesi coi cubetti preparati contemporaneamente ai primi.

« Diamo nei quadri che seguono, i risultati di resistenza ottenuti:

Numero	CEMENTI	Proporzioni dell'impasto		Data della preparazione	Data della esperienza	Giorni trascorsi	Dimensioni dei cubi di prova in mm.	Resistenza in Kg. per mm.²
		Cemento	H_2O					
1	Cemento idr. lenta Marchino.	400	110	2 mar. 94	11 april. 94	40	49,50 × 50 × 49	3,17
2	Cem. Portl. 1ª qual. Fabbrica Casale.	500	126	5 » »	27 » »	53	48 × 48,50 × 47,50	5,03
3	Cem. Portl. 1ª qual. Società Anonima	500	120	»	30 » »	56	48,50 × 49 × 48	5,77
4	Cem. Portl. 2ª qual. Società Anonima.	500	126	»	28 » »	54	47 × 48 × 47	2,95
5	Cem. Portl. Gavelli	500	124	7 » »	24 » »	48	49,50 × 49,50 × 45	2,15
6	Cem. Portl. Dyckerhoff.	500	140	»	13 » »	37	48 × 48 × 50	4,03
7	Cem. Portl. Schifferdecker.	500	120	»	14 » »	38	49,50 × 47,50 × 46	3,61
8	Cem. Portl. Mannheimer.	500	154	»	12 » »	36	47 × 47,50 × 48	3,37
9	Cem. Portl. lenta presa Pelloux.	500	138	»	25 » »	49	48 × 49 × 48	2,24
10	Cem. Portl. lentissima presa Pelloux.	500	145	»	26 » »	50	48,50 × 48 × 50	2,43
11	Cem. a rapida presa Marchino.	500	245	»	5 mag. 94	59	49,50 × 49,50 × 46	Si schiaccia con carico inferiore a 2.
12	Cem. a pronta presa Società Anonima	500	270	»	8 » »	62	49 × 49 × 48,50	Idem
13	Cem. romano Gavelli.	500	250	»	2 » »	56	48 × 50 × 48,50	Idem
14	Cem. Portl. a rapida presa Schifferdecker.	500	150	5 » »	4 » »	60	48,50 × 49,50 × 50	2,15

[1] Mentre in molte nazioni estere come la Germania, l'Austria, la Francia, la Svizzera, la Russia (Wagner-Fischer Jahresberichte der Technologische Chemie 1886, 572; 1887, 819 e 840; 1889, 843; 1890, 775; 1891, 648 e 805) sono state stabilite delle norme ufficiali che regolano l'industria cementizia e sono stati fissati anche dei limiti di tolleranza per la presenza nei cementi di alcuni materiali nocivi come la magnesia, il gesso, i sali alcalini etc; in Italia, per quanto noi sappiamo, nulla è stato fatto di simile. Questa

« Le preparazioni dell'impasto e la data della preparazione sono identiche a quelle della 1ª tavola.

Numero	CEMENTI	Durata dell'esperienza	Giorni trascorsi	Dimensioni dei cubi di prova	Resistenza in Kg. per mm.²
1	Cemento idr. lenta Marchino	6 dic. 94	279	49 × 49,50 × 49,50	3,91
2	Cem. Portl. 1ª qual. Fabbrica di Casale.	7 » »	277	48 × 50,50 × 49,50	5,66
3	Cem. Portl. 1ª qual. Società Anonima.	»	»	50 × 50 × 50	5,57
4	Cem. Portl. 2ª qual. Società Anonima.	8 » »	278	48 × 50 × 51	2,59
5	Cem. Portl. Gavelli . . .	5 » »	277	49 × 50 × 50	2,57
6	Cem. Portl. Dyckerhoff . .	4 » »	278	50 × 51 × 50	4,08
7	Cem. Portl. Schifferdecker .	»	278	49 × 51 × 50	3,71
8	Cem. Portl. Mannheimer . .	10 » »	284	46,50 × 48 × 47	3,97
9	Cem. Portl. lenta presa Pelloux.	5 » »	279	49,50 × 50 × 51	2,96
10	Cem. Portl. lentissima presa Pelloux.	»	279	48 × 49 × 50,50	2,33
11	Cem. a rapida presa Marchino	—	—	—	Si schiacciano con carico inferiore a 2.
12	Cem. a pronta presa Società Anonima.	—	—	—	
13	Cem romano Gavelli . . .	—	—	—	
14	Cem. Portl. a rapida presa Schifferdecker.	10 » »	280	48,50 × 50 × 50	2,41

Queste esperienze furono eseguite nel Gabinetto di costruzioni della R. Scuola di Applicazione. Al chiarissimo prof. Giovanni Salemi-Pace e al suo assistente ing. Antonino La Manna porgiamo i nostri più sentiti ringraziamenti.

« Questi risultati provano ancora una volta come i prodotti nazionali possano benissimo competere con quelli esteri, spesso senza ragione preferiti nelle costruzioni.

« I cementi di Casale Monferrato, di buona qualità, hanno da soli una resistenza da potersi paragonare ai migliori materiali naturali impiegati nelle costruzioni, come si può rilevare dalla seguente tavola:

MATERIALE	Resistenze per mm.²
Gesso impastato con acqua . .	0,30 — 0,50
Tufi teneri	0,50 — 1,50
Mattoni	1,00 — 3,00
Tufi compatti	1,50 — 3,00
Cemento Portland Casale Monferrato	2,15 — 5,77
Calcare compatto	3,00 — 6,00

trascuranza mentre può arrecare detrimento all'industria, che vanta da noi dei prodotti veramente eccellenti, lascia alla discrezione degl'impresari di lavori idraulici di scegliere dei cementi che pur non presentando per l'uso le necessarie garanzie, si possano acquistare a buon patto. Noi ci auguriamo che il nostro Governo vorrà volgere presto la sua attenzione su questa importante quistione.

« Però non sempre si dà il caso in cui il cemento s'impiega da solo. Ordinariamente esso viene corretto con la sabbia in proporzione di 1 : 1 : 2 : 3, il che diminuisce la resistenza nel rapporto di $1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{5}$.

II. Composizione centesimale dei cementi.

« Lo studio della composizione centesimale dei cementi può fornirci criteri sufficienti per dare un esatto giudizio della natura e della bontà di un prodotto idraulico?

« È questa una questione che si è a lungo agitata, e noi abbiamo creduto di fare opera utile aggiungendo alle numerose analisi che si sono finora pubblicate, quelle dei prodotti dei quali abbiamo potuto disporre.

« I metodi che abbiamo adottati sono quelli consigliati dai migliori trattatisti (Fresenius, Classen etc.). Esporremo quindi semplicemente le poche osservazioni e qualche modificazione che ci è capitata di fare nel corso delle nostre analisi (1).

« *Perdita al fuoco.* Gr. 5 circa di cemento furono arroventati sino a costanza di peso. La perdita può essere considerata come acqua e anidride carbonica, proveniente dai carbonati facilmente decomponibili, poichè le sostanze organiche e gli altri corpi volatili accidentali sono ordinariamente in quantità trascurabile.

« *Determinazione dell'anidride carbonica.* Per questa determinazione nessuno dei numerosi apparecchini soffiati proposti da Fresenius, Will, Mohr, Geissler, Rose etc. si prestano nel nostro caso, poichè essendo piccolissima la quantità di anidride carbonica che si riscontra nei cementi freschi, è necessario adoperare una grande quantità di materiale per non incorrere in errore.

« Abbiamo invece fatto uso dell'apparecchio descritto da Fresenius (2), ma l'abbiamo semplificato e reso adatto ad una lunga serie di esperienze nel seguente modo: ai due tubi *i* e *k* a cloruro di calcio abbiamo sostituito un tubo ad U (con due bolle) da combustione, che conteneva nella curvatura dell'acido solforico in quantità tale da funzionare da valvola. Ai quattro tubi *m*, *n*, *o*, *p*, che servono per raccogliere l'anidride carbonica, sostituimmo un solo apparecchio di Geissler da combustione, ripieno di soluzione di potassa caustica 1 : 2.

« In quattordici determinazioni eseguite non sentimmo il bisogno di rinnovare nè l'acido solforico, nè il solfato di rame anidro, e inoltre, siccome la quantità di anidride carbonica contenuta nei cementi è scarsa, la soluzione di potassa del tubo di Geissler potè essere adoperata per diverse successive

(1) Porgiamo i nostri sentiti ringraziamenti all'egregio giovane laureando E. Ceraulo per l'aiuto che ci ha apprestato nel corso di queste analisi.

(2) *Traité d'analyse chimique quant.* pag. 379. 1891.

determinazioni. In tal modo in un giorno si possono eseguire senza difficoltà da 5 a 6 determinazioni.

« Per la determinazione di tutte le altre sostanze contenute nei cementi, seguendo il consiglio di Fresenius (1), abbiamo usato circa gr. 5 di essi e trattati successivamente com'è indicato nello specchietto che segue:

Parte solubile in HCl si diluisce a cc. 500
- cc. 250 si trattano con NH_3
  - precipitato. . . Fe_2O_3, Al_2O_3, (Mn_2O_3)
  - soluzione, si diluisce fino a cc. 500 — cc. 250 — Ca, Mg
- cc. 250 — H_2SO_4, KOH, NaOH

Parte insolubile in HCl — SiO_2, Sabbia e silicati insolubili

« A questo modo la sabbia si pesa in una quantità che varia da gr. 0,39 a gr. 0,11; la silice tra gr. 1,24 e gr. 0,91; l'allumina e il ferro tra gr. 0,16 e gr. 0,49; la calce tra gr. 1,06 e gr. 1,76 l'acido solforico tra gr. 0 e gr. 0,04; la potassa e la soda tra 0 e gr. 0,05.

« *Determinazione della sabbia e della silice.* Abbiamo seguito fedelmente il metodo descritto nei trattati d'analisi (Fresenius, Classen etc.). Dobbiamo osservare che, per quante cure siano state adoperate per trasformare la silice gelatinosa in silice insolubile, sempre piccole quantità sono passate in soluzione e ricomparvero nella determinazione dell'allumina e del ferro. Però la quantità era talmente esigua che si sarebbe potuto quasi trascurare senza incorrere in errore sensibile.

« Col trattamento con acido fluoridrico ci assicurammo, volta per volta, della purezza della silice ottenuta.

« *Determinazione dei sesquiossidi di allumina e di ferro.* Determinammo l'allumina e il ferro allo stato di sesquiossidi e poscia dosammo volumetricamente il ferro. Intorno a quest'ultimo dosamento molti autori consigliano di usare una soluzione titolata di permanganato potassico. Noi cominciammo col tentare questo metodo, però lo abbiamo dovuto abbandonare perchè la riduzione in sale ferroso è lunga e non sempre lo zinco che si adopera, per quanto come puro sia dato dalle fabbriche, è veramente esente di ferro. Preferimmo di adottare invece il processo inverso, fondato sulla riduzione del sale ferrico, mediante una soluzione titolata d'iposolfito sodico e jodio. Nell'applicarlo non incontrammo alcun inconveniente, lo constatammo molto spedito e capace di dare risultati molto soddisfacenti.

(1) *Traité d'analyse chimique quant.* pag. 859. 1891.

« Nel quadro che segue riportiamo i risultati delle nostre analisi:

Numero	CEMENTI	H_2O	CO_2	Sabbia	SiO_2	Al_2O_3	Fe_2O_3	CaO	MgO	H_2SO_4	KOH	NOH
1	Cem. idr. a lenta Marchino	0,92	0,50	2,50	28,00	10,00	1,05	55,15	1,00	—	0,49	—
2	Cem. Portland 1ª qual. Fabbrica Casale . .	0,73	0,42	2,59	21,19	9,26	1,30	62,74	1,17	—	0,30	0,15
3	Cem. Portl. 1ª qual. Società Anonima .	0,87	0,29	2,21	20,26	9,44	1,07	64,01	1,01	—	0,45	0,13
4	Cem. Portl. 2ª qual. Società Anonima .	0,87	0,22	2,23	20,93	9,23	1,00	63,53	1,08	—	0,30	0,20
5	Cem. Portl. Gavelli .	0,56	0,25	2,93	20,18	8,88	1,99	64,05	0,70	—	—	—
6	Cem. Portl. Dyckerhoff	0,71	0,26	2,84	19,37	9,91	1,60	62,36	—	2,00	0,80	0,10
7	Cem. Portl. Schifferdecker	3,13	1,21	2,64	19,16	9,00	2,10	60,04	0,86	0,50	0,90	0,30
8	Cem. Portl. Mannheimer	0,80	0,40	5,27	21,00	8,15	1,80	61,00	0,72	0,60	—	—
9	Cem. Portl. a lenta presa Pelloux. . .	1,75	1,34	2,49	20,15	9,95	1,58	57,96	1,97	2,50	0,30	0,25
10	Cem. Portl. a lentissima presa Pelloux.	1,56	1,65	3,05	21,90	9,87	1,69	56,64	1,83	1,07	0,35	0,30
11	Cem. a rapida presa Marchino	3,10	2,00	1,86	23,75	9,01	1,14	56,31	—	2,10	0,20	0,22
12	Cem. a pronta presa Società Anonima .	1,56	0,77	3,50	21,09	10,41	1,02	60,69	—	—	0,60	0,08
13	Cem. romano Gavelli	1,99	1,34	3,95	23,76	10,06	1,08	55,92	0,80	—	0,50	0,30
14	Cem. Portl. a rapida presa Schifferdecker	2,44	1,30	4,42	19,33	10,20	2,00	57,85	1,00	1,00	—	—

« Da questi risultati riesce evidente che nella composizione centesimale dei cementi italiani ed esteri non esistono notevoli differenze. Faremo soltanto rilevare che tutti i cementi italiani a pronta presa, eccettuato quello di Marchino, che ha una composizione centesimale del tutto speciale, contengono circa l'1 °/₀ di calce in più dei cementi esteri. Faremo osservare inoltre, poichè ciò depone per la bontà dei prodotti, che la quantità di magnesia, di acido solforico o di alcali che contengono o è trascurabile o è molto lontana dai limiti di tolleranza.

« Mostreremo viceversa in un altro lavoro che i cementi italiani e quelli esteri si comportano diversamente rispetto ad un reattivo comune, sia prima che dopo la presa, e che ciò fa supporre una notevole differenza nella costituzione intima dei diversi prodotti.

« Intanto per ora di questi risultati di analisi così concordanti, noi possiamo trarre profitto per stabilire in quale rapporto stanno nei cementi le basi e gli acidi.

« A questo scopo calcolando i valori medi per i cementi a lenta e per quelli a rapida presa si ha:

Ca O	a lenta	61,14
	a rapida	57,67
Mg O	a lenta	1,05
	a rapida	0,90
$Si\ O_2$	a lenta	20,94
	a rapida	21,97
$Al_2\ O_3$	a lenta	9,26
	a rapida	9,91
$Fe_2\ O_3$	a lenta	1,50
	a rapida	1,46

« Dividendo questi valori per l'equivalente di ogni composto e mettendo a numeratore i quozienti ottenuti per la Ca O e la Mg O e a denominatore quelli della $Si\ O_2$, dell'$Al_2\ O_3$ e $Fe_3\ O_2$ (trascurando gli alcali, l' acido solforico e l'acido carbonico che nei cementi si trovano presso a poco in tale quantità da neutralizzarsi), si ricava per i cementi a lenta presa:

$$\frac{CaO\ 2{,}183 + MgO\ 0{,}052}{SiO_2\ 0{,}070 + Al_2O_3\ 0{,}182 + Fe_2O_3\ 0{,}019} = \frac{CaO\,(MgO)\ 2{,}235}{SiO_2(M_2O_3)\ 0{,}901} = 2{,}481$$

per i cementi a rapida presa:

$$\frac{CaO\ 2{,}060 + MgO\ 0{,}045}{SiO_2\ 0{,}0732 + Al_2O_3\ 0{,}194 + Fe_2O_3\ 0{,}019} = \frac{CaO\,(MgO)\ 2{,}105}{SiO_2(M_2O_3)\ 0{,}945} = 2{,}227$$

« Questi risultati non ci sembrano privi d'interesse. Anzitutto essi mostrano una certa differenza nei cementi a lenta e a rapida presa. Inoltre se si ammette che prima o dopo la presa ci sia la tendenza alla formazione di sali neutri, i cementi sono capaci di fornire più della metà di basi libere.

« Ricavati poi come sono da un discreto numero di analisi dimostrano che valore troppo elevato si diede da Le Chatelier a questo rapporto nelle due formole [1]

$$1^\circ \qquad \frac{CaO + MgO}{SiO_2 + Al_2O_3} = 3{,}16$$

$$2^\circ \qquad \frac{CaO + MgO}{SiO_2 - (Al_2O_3 + Fe_2O_3)} = 4{,}41$$

che differiscono, come si vede, nel ritenere che $Al_2\ O_3$ e $Fe_2\ O_3$ possano funzionare da acidi o da basi.

« E viceversa valore troppo basso fu assegnato a tale rapporto nelle norme russe [2].

$$\frac{CaO + Na_2O + K_2O}{SiO_2 + Al_2O_3 + Fe_2O_3} = 1{,}7 \text{ sino a } 2{,}2.$$

(1) Fischer Jahr. d. tech. Chemie 1892, 658 e 667.

(2) » » » 1892, 648

« Nella pratica difatti si fa uso di rapporti che molto si avvicinano a quelli da noi ricavati, poichè raramente si oltrepassa il 2,50 (1) nella preparazione dei miscugli artificiali.

CORRISPONDENZA

Ringraziarono per le pubblicazioni ricevute:

La R. Accademia delle scienze di Lisbona; la Società di scienze naturali di Emden; il Museo Britannico di Londra; la Scuola politecnica di Delft.

Annunciarono l'invio delle proprie pubblicazioni:

La Società zoologica di Londra; il Museo Teyler di Harlem; l'I. Università di Kasan.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

dal 2 giugno al 7 luglio 1895.

Boccardo E. C e *Baggi V.* — Trattato elementare completo di geometria pratica. Disp. 37, 38. Torino, 1895. 8°.

Chijs J. A. v. d. — Catalogus der ethnologische Verzameling van het Bataviaasch Genootschap. v. K. en W. 4e Dr. Suppl. Batavia, 1894. 8°.

Comes O. — Sulla sistemazione botanica delle specie e delle razze del genere Nicotiana. Napoli, 1895. 4°.

Crivetz Th. — Essai sur le postulat d'Euclide. Bucarest, 1895. 8°.

De Camps y de Olzinellas C. — En el reino vegetal no existen individuos. Barcelona, 1895. 8°.

Frech F. — Die Karnischen Alpen 2e Lief. Halle, 1894. 8°.

Holden E. S. — A brief account of the Lick Observatory. Sacramento, 1895. 8°.

Kuntze O. — Geogenetische Beiträge. Leipzig, 1895. 8°.

Lange J. — Descriptio iconibus illustrata plantarum novarum vel minus cognitarum, praecipue e flora hispanica &. Fasc. I-III. Hanniae, 1864-66. f.°

Lemoine E. — Étude sur le triangle et sur certains points de géométrographie. Edinburg, 1894. 8°.

Id. — Le rapport anharmonique étudié au point de vue de la géométrographie &. Paris, 1894. 8°.

(1) Fischer Jahr. d. tech. Chemie 1892, 667.

Setti E. — Dipylidium Gervasii n. Sp. e qualche considerazione sui limiti specifici nei Cestodi. Genova, 1895. 8°.

Sohncke L. — Ueber die Bedeutung der wissenschaftlichen Ballonfahrten. München, 1894. 4°.

Tikhomandritzky M. — Theorie des intégrales des fonctions elliptiques. Karkow, 1895. 8°.

Vesely A. — Medicinska Rus. v Praze, 1894. 8°.

P. B.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia prima del 21 luglio 1895.

Fisica matematica. — *Sull'espressione data da Kirchhoff al principio di Huygens.* Nota del Socio E. Beltrami.

« In un recente ed interessantissimo articolo inserito nel T. 114 del Giornale di Crelle, il Sig. Gutzmer ha mostrato come la formola fondamentale di Kirchhoff possa essere direttamente ricavata dal teorema di Green.

« Questo procedimento ha il rilevantissimo pregio d'eliminare dalla deduzione ogni intervento di funzioni ausiliari (che spariscono poi affatto dal risultato finale) e toglie così di mezzo tutte quelle difficoltà che l'uso di tali funzioni aveva potuto sollevare.

« Quantunque la dimostrazione per tal guisa ottenuta della formola di Kirchhoff debba sotto questo rapporto considerarsi come definitiva, mi pare tuttavia che un ulteriore perfezionamento si possa ancora conseguire prendendo invece come punto di partenza il teorema gaussiano espresso dall'equazione [1]:

$$\int \frac{dV}{dr} \frac{dS}{r^2} = \int V \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma - (\sigma)_o V_o . \tag{1}$$

« Questo teorema, altrettanto importante quanto poco adoperato (e sull'utilità del quale io ho moltissime volte insistito), scaturisce così direttamente dal processo d'integrazione per coordinate polari, che esso può quasi

[1] Per la spiegazione delle segnature usate in questa e nelle seguenti formole veggasi la mia Nota del 1892 *Sull'espressione analitica del principio di Huygens,* in questi stessi Rendiconti.

riguardarsi come intuitivo. Il teorema di Green non ne è che una trasformazione immediata; giacchè per essere:

$$\frac{dV}{dr} = \sum \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} = \sum \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial x},$$

si ha:

$$-\frac{dV}{dr}\frac{1}{r^2} = \sum \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial \frac{1}{r}}{dx} = \sum \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{1}{r}\right) - \frac{\Delta_2 V}{r},$$

epperò dall'equazione (1) si ha subito quella di Green:

$$(\sigma)_o V_o = \int \left(V \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial n}\right) d\sigma - \int \frac{\Delta_2 V}{r}\, dS,$$

dalla quale parte il Sig. Gutzmer.

« Si consideri una funzione $\varphi\ (x,\ y,\ z,\ t)$ soddisfacente all'equazione:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 \Delta_2 \varphi \tag{2}$$

e si ponga:

$$V = \varphi\left(x, y, z, t - \frac{r}{a}\right), \tag{2_a}$$

dove:

$$r = \sqrt{(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 + (z - z_o)^2}.$$

« Per essere:

$$\frac{dV}{dr} = \sum \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial x} - \frac{1}{a}\frac{\partial V}{\partial t},$$

la diretta sostituzione di $(2)_a$ nell'equazione (1) dà:

$$(a)\ (\sigma)_o\, \varphi\, (x_o, y_o, z_o, t) = \int V \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma + \frac{1}{a}\int \frac{\partial V}{\partial t}\frac{dS}{r^2} + \int dS \sum \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}.$$

« Ma avendosi:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{1}{a}\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial t}\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)\frac{\partial x}{\partial r},$$

dalla somma delle tre eguaglianze del tipo:

$$\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)$$

si ricava:

$$(b) \qquad \sum \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} = \sum \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{ar}\frac{d}{dr}\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right) + \frac{1}{a^2 r}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - a^2 \sum \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right),$$

dove l'ultimo termine è nullo in virtù di (2). Si ha dunque (a):

$$(\sigma)_0\, \varphi(x_0, y_0, z_0, t) = \int \left(V \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{V_n}{r}\right) d\sigma + \frac{1}{a}\int \frac{d}{dr}\left(r\frac{\partial V}{\partial t}\right)\frac{dS}{r^2},$$

dove si è posto:

$$V_n = \sum \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n}.$$

« Ma dallo stesso teorema (1) si deduce anche:

$$\int \frac{d}{dr}\left(r\frac{\partial V}{\partial t}\right)\frac{dS}{r^2} = -\int \frac{\partial V}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial n}\frac{d\sigma}{r} = a\int \frac{\partial V}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial n}\frac{d\sigma}{r};$$

si ha dunque, più semplicemente:

$$(3) \qquad (\sigma)_0\, \varphi(x_0, y_0, z_0, t) = \int \left\{\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{V}{r}\right) - \frac{V_n}{r}\right\} d\sigma,$$

intendendo che la derivata normale di $V:r$ si riferisca al solo raggio vettore r.

« Se, come è d'uso, si sostituisce a V, nel secondo membro di quest'equazione, il simbolo:

$$\varphi\left(t - \frac{r}{a}\right),$$

si ottiene così senz'altro la formola di Kirchhoff.

« È facile rilevare, da (b), che ove si volesse prescindere dalla sussistenza dell'equazione (2), basterebbe aggiungere al secondo membro di (3) il termine:

$$-\int \left\{\sum \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}\right\}\frac{dS}{r} \text{ ».}$$

Fisica. — *Nuovi studi sulle proprietà elastiche dei metalli.* [1]. Nota del dott. M. Cantone, presentata dal Socio Blaserna.

Facendo seguito ai miei precedenti lavori sulla torsione dei metalli [2], voglio in questa Nota render conto di altri risultati che potranno servire a

[1] Lavoro eseguito nel Laboratorio di fisica della R. Università di Palermo.
[2] V. Rend. Acc. dei Lincei 4, 1° Sem. 1895.

dare un'idea più completa del modo come si comportano le varie sostanze per riguardo alle proprietà elastiche.

Accomodazione.

Comincio dall'occuparmi di un processo che sin da quando comunicavo l'esito dell'esperienze sulla flessione [1], per i particolari inerenti a taluni fatti accertati nella torsione del nichel, avevo riconosciuto meritevoli di ulteriore studio.

Il fenomeno di cui parlo si manifesta qualora un corpo, raggiunta la prima volta una deformazione al di là dei limiti dentro i quali gli scostamenti dalla legge di Hooke sono piccoli, si sottoponga ad una serie di cicli tra la forza relativa a siffatta deformazione ed un'altra qualsiasi.

Quasi tutti i metalli presentano nella torsione per il processo in esame il comportamento caratteristico dell'ottone cimentato con forze flettenti; mi dispenso quindi dall'esporre cose già dette, limitandomi a trattare quei punti i quali possano fornire elementi nuovi per il nostro studio.

Dalle indagini fatte si deduce che solo nel nichel ricotto l'accomodazione procede, per cicli di grande ampiezza, con caratteri opposti a quelli messi in evidenza per l'ottone. Fermiamoci per constatarlo al caso dei *cicli bilaterali* che, come è noto, si prestano meglio all'esame del fenomeno. Osserviamo allora che mentre con forze agenti entro limiti ristretti si hanno nel metallo anzidetto risultati analoghi a quelli degli altri metalli, quando invece si parta da un angolo piuttosto grande, col succedersi dei cicli crescono le deformazioni estreme e le permanenti, onde per ciascuno di essi col ritorno alla forza massima P_1 [2] si perviene ad una torsione superiore alla iniziale. Nel diagramma s'intersecano pertanto gli archi figurativi dei due passaggi $(P_1' - P_1)$, $(- P_1' P_1)$, in prossimità del punto che corrisponde a $P = P_1$, e manca la simmetria nella curva che rappresenta il ciclo. Effetti analoghi si hanno colle ulteriori alternazioni, ma gl'incrementi cennati si rendono da un passaggio all'altro più piccoli fino a che spariscono, o quasi.

La posizione di riposo attorno cui compionsi i successivi cicli, quale si ricava dalla media delle due letture fatte al cannocchiale per $P = 0$, subisce in principio un sensibile spostamento rispetto alla originaria, ma in seguito o rimane costante o si avvicina alla iniziale.

Altra manifestazione del processo che si compie nel corpo, è l'aumento delle aree d'isteresi fino ad un limite, (che pare si alteri solo per l'influenza di circostanze speciali); ed anche qui abbiamo, come era da prevedersi, proprietà opposte a quelle dell'ottone.

(1) V. loc. cit. 2, 2° Sem. p. 385, 1893.

(2) Per il signicato dei simboli che qui si adoperano, vedi quanto si disse in una precedente Nota (Rend. Acc. dei Lincei 4, 1° Sem. p. 385)

Ad avvalorare le nostre deduzioni sarà bene riportare in succinto i risultati dell'esperienze compiute con tre fili di nichel ricotto mediante cicli bilaterali con forze estreme di 600 gr. In ogni tabella si denotano con ω_1, ω_0, $-\omega_1$, $-\omega_0$ gli angoli che corrispondono alle forze P_1, *zero*, $-P_1$, *zero*, e con A l'area d'isteresi; osservando che ciascun rigo contiene i valori delle ω e di A pertinenti ad un ciclo. Gli angoli sono espressi in *minuti primi*, e per le aree d'isteresi, mantenendo la stessa unità riguardo agli angoli, si assume come momento unitario quello che corrisponde ad un carico torcente di 100 gr. Aggiungerò in fine che una stelletta apposta ad uno dei valori delle ω indica una interruzione del processo, che lo stesso segno racchiuso fra parentesi serve a denotare una interruzione operata lasciando il carico massimo, e che con *s* si accenna alla *scarica* eseguita col metodo delle *alternazioni decrescenti* [1], prima della lettura cui l'indicazione si riferisce.

TABELLA I.

Ni_3 ricotto					Ni_4 ricotto					Ni_5 ricotto				
ω_1	ω_0	$-\omega_1$	$-\omega_0$	A	ω_1	ω_0	$-\omega_1$	$-\omega_0$	A	ω_1	ω_0	$-\omega_1$	$-\omega_0$	A
963	135	— 955	— 126	2240	986	128	— 972	— 110	2097	963	129	— 1003	— 159	2535
976	143	— 971	— 134	2365	1016	153	— 983	— 118	2330	997	149	— 1018	— 170	2733
982	146	— 991	— 151*	2532	1030	160	— 995	— 126	2463	1007 (*)	163	— 1027	— 175	2909
989	151	— 983	— 145	2510	1037	165	— 999	— 127*	2502	1018	166	— 1033	— 178	2945
992	151	— 989	— 146	2548	1048	170	— 1009	— 134	2617	1027	175	— 1038	— 179	3054
994	153	— 990	— 146	2533	1049	171	— 1012	— 135	2607	1033 (*)	179	— 1042	— 182	3123
994	154*	— 992	— 149	2592	1054	174	— 1013	— 134*	2633	^{s}1034	178	— 1039	— 178	3079
1000	157	— 992	— 149	2611	1056	173	— 1017	— 137	2675	1035	177	— 1043	— 179	3062
1001	156	— 995	— 150	2622	1056	171	— 1015	— 134	2647	1043 (*)	185	— 1043	— 178	3125
1003	157	— 994	— 149	2632	1057	171*	— 1018	— 137	2668	1044	183	— 1049	— 183	3153
1002	155*	— 994	— 149	2623	1059	174	— 1019	— 135	2677	1044	179	— 1048	— 180	3112
1002	157	— 995	— 151	2627	^{s}1050	169	— 1012	— 127	2567					
1004	156	— 1000	— 150	2645	1058	173	— 1015	— 131	2606					
1008 (*)	163	— 997	— 149	2687	^{s}1052	170	— 1011	— 127	2591					
1007	159	— 1002	— 151	2671	1061	174	— 1014	— 129	2597					
1007	160	— 993	— 148	2627										
1005	157*	— 1002	— 153	2664										
1006	157	— 1007	— 154	2678										
1006	156	— 1008	— 155	2683										
^{s}998	150	— 995	— 145	2575										
1004	153*	— 997	— 151	2632										
997	150	— 998	— 150	2508										

« I particolari da noi avanti esposti sull'accomodazione del nichel ricotto risultano dimostrati in modo netto dalle precedenti tabelle. Deve notarsi intanto come il processo si compia regolarmente in ciascuno dei fili, quando il lavorìo procede in modo normale e continuo: se stiamo infatti ai valori

[1] V. loc. cit. 2, 1° Sem. p. 339.

delle aree, i quali forniscono l'elemento più adatto per il nostro studio, si trova che essi vanno crescendo al succedersi dei cicli con rapidità sempre minore, e che da una tal legge si discostano per i cicli eseguiti in condizioni particolari. Basta una interruzione nel processo lasciando il corpo con o senza carico, perchè le A accusino subito dopo un aumento più forte, mentre per la *scarica alternata* si ottiene l'effetto opposto.

« Queste anomalie sono puramente transitorie, giacchè dopo uno o due cicli si ritorna all'andamento normale, ma la loro esistenza rivela come l'accomodazione si compia in parte anche durante il riposo (1), e come per la *scarica* si palesi la tendenza al ritorno nello stato primitivo.

« Se i fenomeni che presenta il nichel ricotto nel processo del quale ci occupiamo fossero comuni a tutti i corpi, sarebbe facile darsene ragione ammettendo che le prime deformazioni per forze agenti in un senso provochino la rottura di alcuni gruppi molecolari, facendo assumere ad un certo numero di particelle le propietà dello stato fluido, (rese manifeste dai fenomeni di elasticità susseguente), e che l'intervento successivo di forze agenti in senso opposto, ove la deformazione massima sia contenuta entro limiti non molto estesi, pur non ricostituendo quei gruppi, tenda a dare al corpo condizioni di struttura più omogenee, facendo rientrare le molecole libere nell'orbita di attrazione delle rimanenti. Qualora però l'angolo da cui si prende le mosse nel compiere i successivi cicli sia molto grande, è possibile che le prime alternazioni invece di riparare le rotture prodotte dai carichi crescenti iniziali ne provochino delle altre, (come attesterebbe il fatto di aversi nel nichel ricotto per grandi ampiezze azioni susseguenti maggiori col ripetersi dei cicli, in guisa da mostrarsi più accentuati i fenomeni d'isteresi col procedere del lavorìo, sino a che si stabilisce un compenso fra le particelle che si rendono libere e quelle che entrano nell'orbita di attrazione delle molecole vicine.

« Potrebbe darsi che il comportamento del nichel ricotto fosse dovuto ad una particolare struttura di questo metallo, però, sebbene la seconda fase del processo non risulti accertata per gli altri, non siamo autorizzati a ritenere che il caso del nichel costituisca una eccezione per una circostanza che credo opportuno di porre in rilievo.

« Ho gia detto altra volta (2) che spingendo il carico torcente ad un limite molto elevato comincia uno scorrimento continuo delle particelle, che nelle mie esperienze cessava ad un certo punto per l'urto dei pesi contro un ostacolo. Non potrei dire se il fenomeno debba ascriversi al fatto che il corpo acquisti i caratteri di un fluido nelle varie parti, o che ciò avvenga solo in una ragione limitata, però è certo che quando si oltrepassa un limite di forza torcente non è più possibile l'equilibrio, e di conseguenza vien meno

(1) Confr. Rend. Acc. dei Lincei 3, 1° Sem. p. 32.

(2) V. Rend. Acc. dei lincei 3, 2° Sem. p. 12S.

la base dei processi statici. E siccome nei metalli molto pastosi questo limite è relativamente basso, non è improbabile che per essi venga a restringersi troppo il campo di deformazioni a partire dalle quali si avrebbe, prima degli scorrimenti continui, l'accomodazione esaminata nel nichel ricotto; ed allora i fenomeni presi in esame nella Nota attuale non sarebbero esclusivi di questo metallo (1).

« Comunque sia, rimane assodato che il processo di accomodazione produce, a seconda dei casi, effetti diametralmente opposti, non potendosi attribuire i fatti messi in rilievo per il nichel ricotto a cause estranee al fenomeno, vuoi per la loro entità, vuoi per il modo regolare e costante come essi si presentano.

« Un fenomeno che si connette coll'accomodazione è il ritorno di un corpo, che con una forza P_1 abbia subìto scorrimenti continui sino all'urto dei pesi contro un ostacolo, ad uno stato quasi normale mercè l'uso di un processo facile ad attuarsi.

« Il filo portato alla quiete coll'arresto del piatto presenta grandi reazioni quando si passi alle forze decrescenti, avendosi in tal caso piccole deformazioni, tanto che per $P = -P_1$ non si arriva a togliere tutta la torsione primitiva. Ma aggiungendo pochi grammi al peso P_1 nel piatto dei carichi negativi, si passa agli scorrimenti continui dalla parte opposta di prima, manifestandosi con ciò una instabilità delle particelle sotto l'azione di uno sforzo che, a parte il segno, è un poco maggiore di quello iniziale. È possibile tuttavia, se non si arriva al nuovo limite, trovare un peso torcente che dia una deformazione stabile in corrispondenza all'estremo della scala. Togliendo allora questo carico e tornando a mettere pesi nel piatto che dà i momenti torcenti positivi, si perviene ad una deviazione presso a poco uguale alla precedente con un carico ancora più grande, e così di seguito, fino a che con forze uguali agenti ora da una parte ora dall'altra gli angoli ad esse relativi si mantengono ad un dipresso della stessa grandezza.

« Il corpo si trova in tal maniera ricondotto in uno stato quasi normale, potendosi con successo applicare il noto metodo di *scarica*, e compiere poi i cicli sino al limite massimo di forza cui avanti ci eravamo spinti; solo si trova che per le prime forze torcenti la cedevolezza è cresciuta, ma di poco.

Deformazioni permanenti.

« Non posso dar termine a questa serie di lavori sulla torsione dei metalli, senza occuparmi di un fatto che ebbi a constatare nell'esame dei risultati ottenuti coi diversi fili.

« Se a partire dallo stato iniziale, o dallo *zero di scarica*, si sottopone

(1) Lascio impregiudicata la questione se per i fili sottoposti a forze torcenti abbia influenza sull'accomodazione il peso tensore, occorrendo esperienze apposite per un giudizio esplicito sul riguardo.

il corpo a forze che crescono sino ad un valore estremo P_1, la deformazione che ne consegue è all'incirca uguale alla differenza fra l' angolo che corrisponde a P_1 e quella che si sarebbe avuta per la legge di Hooke estesa dai valori più piccoli di P a P_1, od in altri termini è rappresentata dalla porzione della ordinata relativa a P_1 compresa fra il punto figurativo della deformazione estrema ed il punto d'incontro colla tangente all' origine della curva che dà la legge di deformazione da *zero* a P_1.

« La verifica della legge ora enunciata, poichè si basa sulla deformazione relativa al più piccolo dei carichi torcenti, non è possibile ove per cause accidentali venga alterata la cedevolezza del corpo rispetto a questa forza; donde la necessità di scartare quelle serie che dal confronto fra i risultati ottenuti per lo stesso metallo accusavano in modo manifesto l'intervento di siffatte cause.

« Si vide inoltre che la legge si verifica poco bene nei casi nei quali, operando per cicli bilaterali di ampiezza crescente, si rivela durante la serie, stando alla media dei due valori di ω per $P = 0$ in ogni ciclo, un cambiamento della configurazione attorno cui il corpo si deforma; vennero quindi anco escluse dal nostro esame tali serie, a meno che per lo stesso metallo non se ne possedessero altre in condizioni sperimentali migliori.

« Restava con ciò materia bastevole per la verifica propostaci, che diede nella maggior parte dei casi risultati soddisfacenti; come si può argomentare dalle tabelle che seguono, dove P_n indica la forza estrema impiegata cui si riferisce la deformazione permanente ω_0, e δ lo spostamento dalla legge di proporzionalità in corrispondenza a P_n.

TABELLA II.

Accomodazione $P_1 = 600$					
Ni_3 ric.		Ni_4 ric.		Ni_5 ric.	
ω_0	δ	ω_0	δ	ω_0	δ
131	116	119	111	144	142
139	129	135	133	160	159
149	142	144	143	169	170
148	141	146	151	172	178
149	145	152	159	177	185
151	148	153	161	180	188
153	150	154	164	178	178
153	153	155	167	182	182
153	152	152	166	183	185
151	152	154	164	180	185
154	153	155	168	173	175
153	156	148	142	177	180
155	156	152	147		

TABELLA III.

P_n	Ni_3 ric.		Ni_5 ric.		Ni_6 crudo		Ni_7 crudo	
	ω_0	δ	ω_0	δ	ω_0	δ	ω_0	δ
200	5	5	5	3	1	2	3	4
300	10	8	10	7	7	6	6	10
400	22	17	24	18	15	14	13	18
500	50	46	59	55	31	32	27	37
600	124	124	154	171	62	64	54	66

TABELLA IV.

P_n	Ni_8 ricotto						Ni_9 crudo	
	ω_0	δ	ω_0	δ	ω_0	δ	ω_0	δ
100	2	2	2	2	3	3	0,7	0,8
150	4	4	3	4	4	4	1,1	1,1
200	6	6	6	5	6	5	1,5	2,1
250	12	13	11	10	11	10	2,2	2,6
300	24	24	20	20	20	20	3,1	3,2

Tabella V.

P_n	Ni_{10} ricotto						Ni_{11} ricotto						
	ω_0	δ	ω_0	δ	ω_0	δ	ω_0	δ	ω_0	δ	P_n	ω_0	δ
200	8	5	7	4	7	5	6	4	6	4	150	3	2
250	16	13	14	11	14	11	12	9	12	10	200	6	5
300	34	31	29	26	29	27	25	22	25	21	250	11	11
350	75	72	63	62	60	58	54	52	52	50	300	23	23
400	147	152	131	138	122	128	101	104	99	100			

Tabella VI.

Ot_1 ric.			Ot_2 ric.			P_n	Fe_1 ric.		Fe_2 ric.					
P_n	ω_0	δ	P_n	ω_0	δ		ω_0	δ	ω_0	δ	ω_0	δ	ω_0	δ
50	1	— 1	100	1	1	200	1	1	3	2	3	1	4	3
75	2	0	150	2	1	300	2	3	7	7	8	8	8	8
100	6	5	200	6	5	400	3	3	15	17	18	16	16	19
125	20	21	250	25	27	500	3	3	32	35	32	32	30	34
			300	109	131	600	4	5						

Tabella VII.

P_n	Fe_3 ric.						P_n	Fe_4 ric.		P_n	Ag_2 ric.	
	ω_0	δ	ω_0	δ	ω_0	δ		ω_0	δ		ω_0	δ
50	1	1	2	3	2	3	200	3	4	50	3	2
75	3	4	3	4	3	4	300	7	7	75	6	7
100	14	14	9	10	5	5	400	16	19	100	18	20
125	45	46	31	33	9	11	500	45	52			
150					45	46	600	127	149			

Tabella VIII.

P_n	Cu_1 ric.		Cu_2 ric.		Cu_3 ric.		P_n	Pt_1 ric.					
	ω_0	δ	ω_0	δ	ω_0	δ		ω_0	δ	ω_0	δ	ω_0	δ
50	3	3	2	2	1	0	100	4	3	4	5	5	4
75	8	8	7	8	3	2	125	7	5	7	6	10	8
100	26	32	20	25	5	5	150	15	14	15	16	18	18
125					12	12	175	41	41	40	44	47	49
150					25	29	200	108	115	101	114	105	116

TABELLA IX.

Al_1 ric.			P_n	Al_2 ric.									
P_n	ω_0	δ		ω_0	δ	ω_0	δ	ω_0	δ	ω_0	δ	ω_0	δ
50	7	7	100	2	3	2	0	1	0	2	1	1	2
75	22	21	150	38	35	10	10	4	3	5	3	2	3
100	52	57	200					15	16	25	25	11	13
125	154	161	250							187	191	80	87

« È da notare che nel principio dell'accomodazione dei fili di nichel manca l'accordo fra le δ e le ω_0, ma ciò era da prevedersi per la circostanza che con questo processo il corpo manifesta ai primi cicli una sensibile dissimmetria la quale, come sappiamo, tende a mascherare la legge relativa alle deformazioni permanenti.

« Del resto, poichè in generale essa risulta sensibilmente verificata, io credo si possa senz'altro ammetterla, e ritenere quindi che nel corpo perdurino col ritorno alla forza *zero* quasi tutti gli effetti dovuti alle cause che hanno prodotto le deviazioni dalla legge di proporzionalità ».

Chimica. — *Ricerche sui fenomeni che avvengono durante la presa dei cementi.* Nota di G. ODDO ed E. MANZELLA [1], presentata dal Socio PATERNÒ.

« Mentre l'importante osservazione fatta da I. Smeaton nel 1756, che nella cottura dei calcari argillosi si formano materiali idraulici, e la discussione che ne seguì sulle cause che determinano tale idraulicità, alla quale presero parte Descotil, Bergmann, Guyton Morveau, Saussure, Vicat ed altri, condusse agli importanti successi industriali della preparazione del cemento romano [2] e del cemento Portland [3], può asserirsi viceversa che la discussione sui fenomeni che avvengono durante la presa, sebbene sia stata molto lunga e spesso molto vivace, non solo resta tuttavia ben lungi dall'essere in alcun modo definita, ma scarsa utilità pratica ha arrecato per il progresso dell'industria cementizia.

« Ciò non deve arrecare meraviglia, poichè grandi sono le difficoltà che si presentano per risolvere tale questione, che è intimamente legata a quella

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico dell'Università di Palermo.

(2) Fu eseguita la prima volta da Iames Parker nel 1796.

(3) Fu preparato da I. Aspdin nel 1824.

della conoscenza della costituzione chimica dei varî composti che si trovano in questi miscugli che costituiscono i cementi.

« Le varie ipotesi che sono state emesse si possono raggruppare in queste due principali:

1° Sostengono alcuni che la presa dei cementi avvenga per semplice processo di idratazione di alcuni sali che si formano durante la cottura dei calcari argillosi, o dei miscugli artificiali di carbonato di calcio e argilla, come per il gesso.

2° Altri invece credono che avvenga per la combinazione, a contatto dell'acqua, della silice, dell'allumina, del sesquiossido di ferro, della calce, della magnesia ecc. che nei cementi freschi si devono trovare completamente o in parte allo stato libero.

« Autore della prima ipotesi è Vicat sin dal 1818, della seconda Fuchs sin dal 1833 (1).

« La seconda ipotesi ebbe da principio maggior numero di sostenitori, tra i quali vanno ricordati Pettenkofer che nel 1849 l'estese al cemento Portland che frattanto si conobbe, Feichtinger che nel 1858 (2) la sostenne con ardore sebbene non sempre con felici argomentazioni; Winkler (3) che nello stesso tempo, polemizzando con Feichtinger, l'ammise soltanto per il cemento romano e per la calce idraulica mentre per il Portland ritenne che non contenesse della calce libera, bensì dei silicati polibasici che a contatto con l'acqua si disgregano cedendo della calce; Michaelis (4) che nel 1867 con finezza di osservazioni accettò la distinzione fatta da Winkler, ma ammise per il Portland un semplice processo d' idratazione; Schulatschenko ed altri.

« L' ipotesi di Vicat in un tempo relativamente più recente ha ricevuto viceversa delle conferme sperimentali, sebbene esse non possano ritenersi come decisive.

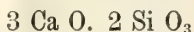
« Si è discusso però sulla natura dei sali che esistono nei cementi cotti e sono capaci nell'idratarsi di determinare la presa.

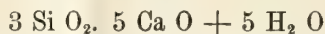
« Mentre Vicat (5) ammise che ciò fosse dovuto ad un silicato doppio di alluminio e di calcio, Rivot e Chatoney (6) nel 1856 l'attribuirono ad un alluminato tricalcico $Al_2O_3 . 3CaO$ e ad un silicato $SiO_3 . 3CaO$, capaci di assorbire ciascuno 6 molecole di H_2O e di far presa. Conformemente a questa ipotesi Fremy (7) nel 1865 dimostrava che i sali:

$$Al_2O_3 . CaO; \quad Al_2O_3 . 2CaO; \quad Al_2O_3 . 3CaO.$$

(1) Poggend. Annal. XXVII. 591; Jahresb. der Chemie, 1835, 154.
(2) Dingl. Pol. Jour. CLXXIV. 433 e seg.; Jahresb. der Chemie, 1864, 770.
(3) Dingl. Pol. Jour. CLXXV. 208; Wagner Jahresb. 1865, 337 e seg.
(4) Jour. fur. prach. Ch. 100. 257. Wagner Jahresb. 1880, 506.
(5) Jour. für pr. Ch. XXVI. 418.
(6) Comp. Rend. 1856. I, pag. 1119.
(7) Comp. Rend. LX. 993; LXVII. 1205.

sono capaci di far presa con l'acqua e ne ammise pure l'esistenza nei cementi; mentre Heldt [1] nello stesso anno oltre a confermare questo fatto, studiando diversi silicati di calcio da lui preparati sinteticamente, riusciva a dimostrare che soltanto il composto:

$$3\ CaO.\ 2\ SiO_3$$

fa presa con l'acqua trasformandosi in

$$3\ SiO_2.\ 5\ CaO + 5\ H_2O$$

e ammise che questo fosse il composto attivo di tutte le malte idrauliche.

« Le Chatelier [2] finalmente, studiando il comportamento al microscopio polarizzatore dei tagli sottili di cemento Portland indurito, credette potervi dimostrare l'esistenza dell'alluminato tricalcico di Fremy e del silicato di Heldt.

« Ipotesi di altra natura frattanto sono state emesse e noi citeremo brevemente che Knapp [3] ritenne che la presa delle malte idrauliche sia dovuta all'azione simultanea di processi chimici e meccanici, rievocando una antica idea di Cheuvreul che la presa fosse dovuta esclusivamente ad un fenomeno di capillarità. Questa ipotesi fu però combattuta recentemente da W. Ostwald ed E. Blank [4] con dati termochimici.

« Con questi brevi cenni storici crediamo di aver potuto far rilevare come coi metodi di analisi di cui finora disponiamo non si sia riuscito non solo a risolvere, ma neanche a mettere un po' di luce nella quistione; e con le ricerche di sintesi nemmeno si abbia raggiunto tale scopo, poichè non si son potuti isolare i composti contenuti nei cementi per identificarli con quelli preparati per sintesi.

« Desiderando quindi di coltivare anche noi questo campo sperimentale, cercammo di investigare per ora un nuovo metodo di ricerca.

« In questo primo lavoro ci proponemmo di definire quale azione spiegano sopra i cementi, sia prima che dopo la presa, l'acqua e l'anidride carbonica, i due agenti principali ai quali i cementi restano sottoposti in natura. Per soddisfare le esigenze del nostro metodo, invece di soluzione di anidride carbonica facemmo uso di quella di carbonato potassico.

Parte sperimentale

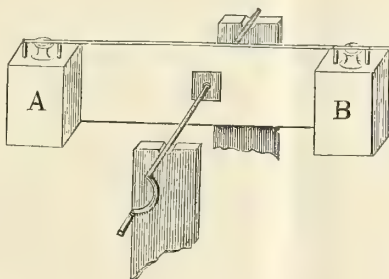
« Sottoponemmo nelle medesime condizioni quantità equivalenti dello stesso cemento, sia prima della presa che dopo, all'azione di una soluzione titolala di carbonato potassico.

(1) Jour. für. pr. Ch. XCIV, 129, 202.
(2) Compt. Rend. *94,* 867; *96,* 715, 1056.
(3) Wagner, Jahresb. 1875. 734; 1876. 1114.
(4) Wagner, Jahresb. 1883. 639.

« Per impiegare quantità equivalente di cemento, si determinava in quello indurito (¹) la perdita al fuoco e si calcolava la quantità di prodotto che conteneva grammi 5 di calce.

« La soluzione titolata del carbonato potassico conteneva disciolti sino a cc. 500 grammi 12,32 di sale, quantità calcolata per equivalenti uguali di calce e carbonato potassico. Le altre basi che entrano in piccole quantità nei cementi venivano trascurate.

« Per fare svolgere la reazione per quanto più uniformemente era possibile su tutta la massa, ed evitare inoltre la presa del cemento fresco, i recipienti nei quali erano contenuti i miscugli furono sottoposti ad agitazione rapida.

« A questo scopo facemmo uso di un agitatore del quale riportiamo la figura.

« In ciascuna delle cassette A e B che erano esattamente equidistanti dal centro di rotazione, veniva riposta una bottiglia da un litro a turacciolo smerigliato, che conteneva il cemento e la soluzione di $K_2 CO_3$. Per mezzo di un rapido movimento oscillatorio di circa 180° si determinava un brusco rimescolamento di tutta la massa. Le esperienze venivano eseguite in quest'ordine: si agitava per $^1/_2$ ora, poscia si sospendeva per 20′, per lasciare depositare la polvere in sospensione e, trascorso questo tempo, con due pipette graduate si toglievano contemporaneamente cc. 5 di ciascuna soluzione, che venivano filtrati a traverso un doppio filtro e raccolti assieme con le acque di lavaggio dei filtri.

« Altri cc. 5 di ciascuna soluzione si trattavano con leggiero eccesso di cloruro di bario e dopo avere riscaldato a circa 80°, si filtrava e si lavava a lungo il residuo.

« Al principio dell'ora successiva si ripeteva il processo.

« Nei quattro liquidi che così avevamo ogni ora si determinava l'alcalinità: nei primi due essa era dovuta al $K_2 CO_3$ che non aveva ancora reagito,

(¹) Per queste esperienze abbiamo fatto uso dei cementi freschi che descrivemmo in un nostro precedente lavoro, e dei frammenti dei cubi di prova preparati per le ricerche sulla resistenza alla pressione, che avevamo conservati in fiaschi perfettamente chiusi.

alla potassa formatasi nel doppio scambio tra il K_2 CO_3 e la calce e a tracce di idrato di calce rimasto in soluzione; si trascurava pertanto quel po' di alcalinità che poteva provenire dalle piccole quantità di carbonato alcalino che quasi costantemente si trovano nei cementi.

« Questa titolazione la dicemmo *alcalinità totale della soluzione*. Siccome si adoperò come indicatore la fenolftaleina, si versava nel liquido filtrato cc. 20 di una soluzione $\frac{n}{10}$ di HCl, e dopo avere riscaldato fino quasi all'ebollizione per scacciare la CO_2 si titolava con soluzione egualmente $\frac{n}{10}$ di KOH l'eccesso di HCl.

« Negli altri 2 liquidi, nei quali si era precipitato tutto il K_2 CO_3 allo stato di Ba CO_3, l'alcalinità era dovuta alla KOH formatasi nel doppio scambio (oltre che a tracce di Ca $(OH)_2$ rimasta in soluzione) e poteva quindi considerarsi come l'indice dell'alcalinità, in basi libere, che nelle successive unità di tempo andavano acquistando i cementi. L'abbiamo perciò indicata col nome di *alcalinità dei cementi*.

« Le determinazioni si eseguivano con soluzioni $\frac{n}{10}$ di acido ossalico, usando come indicatore la lacca muffa.

« Nelle prime esperienze quel po' di ossalato di calce che precipitava veniva raccolto, lavato e dosato con soluzione titolata di permanganato potassico. Siccome la quantità di calce che si otteneva era piccolissima, ne trascurammo in seguito la determinazione.

« Queste esperienze furono ripetute in ogni cemento per nove ore successive e senza interruzione; in ogni ora il tempo era sufficiente per compire la titolazione in corso.

« Nei quadri che seguono riportiamo i risultati ottenuti. Dobbiamo fare osservare che l'alcalinitá è stata riferita a grammi 100 di calce e per rendere più evidenti i risultati è stata espressa in cc. di soluzione $\frac{n}{10}$ di acido.

Cemento Portland Dyckerhoff und Söhne.

Calce % 62,36.
Perdita al fuoco del cem. indur. 18,76 %
Cem. impieg. { prima della presa gr. 8,02
{ dopo la presa . » 9,87

Prima della presa		Dopo la presa	
Alcalinità dei cementi	Alcalinità totale della soluzione	Alcalinità dei cementi	Alcalinità totale della soluzione
36	330,60	59	329
34,60	325	73	322
38	336,60	72	333
37	334	81	332
31,20	337	79,20	334,8
33,80	318	76	330
37,80	329	78	335
38,20	329,60	90	334
35	—	90	331

Cemento Portland a lenta presa, Schifferdecker und Söhne, Heidelberg.

Calce % 60,04.
Perdita al fuoco del cem. indur. 20,12 %
Cem. impieg. { prima della presa gr. 8,327
{ dopo la presa . » 10,81

Prima della presa		Dopo la presa	
Alcalinità dei cementi	Alcalinità totale della soluzione	Alcalinità dei cementi	Alcalinità totale della soluzione
27	355,6	44	354,4
36	354	60	343
34,8	352	63,4	347
33,6	352	63,6	357
37	351,2	64,4	354,8
48	360,8	80	350
36	362	76,4	360
41,2	360	83,2	356
42,4	360	89,4	360,06

Cemento Portland Mannheimer.

Calce % 61.
Perdita al fuoco del cem. indur. 19.56
Cem. impieg. { prima della presa gr. 8.2
{ dopo la presa . » 10.02

Prima della presa		Dopo la presa	
Alcalinità dei cementi	Alcalinità totale della soluzione	Alcalinità dei cementi	Alcalinità totale della soluzione
40	352	55	352
39,2	339,4	57,6	335
44	341	65	336
53	340	90	340
57	339,4	92	338,8
60	344	96	344,2
50	360	79,6	352,2
52	360,4	98,2	353,2
45,2	356,2	93,2	329,6

Cemento Portland a presa lenta. Pelloux. Grenoble.

Calce % 57,96.
Perdita al fuoco 18,03 %.
Cem. impieg. { prima della presa gr. 8.63
{ dopo la presa . » 10.52

Prima della presa		Dopo la presa	
Alcalinità dei cementi	Alcalinità totale della soluzione	Alcalinità dei cementi	Alcalinità totale della soluzione
17	342	34,4	342
17,4	343,6	43	350,8
16,8	340	46,4	344
14,8	350	48	344,4
16	340	53	340
15	334,8	69,3	340,6
19	337	65,4	346
17,4	338	78,6	343,4
18,4	336	77	345,6

Cemento Portland a presa lentissima, Pelloux, Grenoble.

Calce % 56,64.
Perdita al fuoco del cem. indur. 19,15 %.
Cem. impieg. { prima della presa 8,82. / dopo la presa 10,92

Prima della presa		Dopo la presa	
Alcalinità dei cementi	Alcalinità totale della soluzione	Alcalinità dei cementi	Alcalinità totale della soluzione
20	346	26	347,6
21	337	38	338
26	338,2	45	340
29	341,6	53	343,4
34,4	347,4	51,8	336,4
28,6	348,8	51,6	341
28,4	348,6	47,0	349
29,2	345	48,8	341
33,0	345,20	61,4	344,4

Cemento idraulico a lenta presa Marchino e C. Casalmonferrato.

Calce % 55,15.
Perdita al fuoco del cem. indur. 18,08 %.
Cem. impieg. { prima della presa gr. 9,06 / dopo la presa . » 11,09

Prima della presa		Dopo la presa	
Alcalinità dei cementi	Alcalinità totale della soluzione	Alcalinità dei cementi	Alcalinità totale della soluzione
55	311	60	317,4
63	326	68	323,6
64,4	322	67	327,6
70	333,4	76,6	326
75	332	77,4	323,4
62,2	336	76	331,8
—	327	71	322
70	328	78	320

Cemento Portland 2ª qualità, Società Anonima, Casalmonferrato

Calce % 63,53.
Perdita al fuoco del cem. indur. 17,76 %
Cem. impieg. { prima della presa gr. 7,90 / dopo la presa . » 9,60

Prima della presa		Dopo la presa	
Alcalinità dei cementi	Alcalinità totale della soluzione	Alcalinità dei cementi	Alcalinità totale della soluzione
21,4	363	26	351,4
26	372	57	346
20	364	62	346
21	360	69,2	360
28	359	70	344
27	357	74,4	345
28	336,4	76	340
31	342	77	346,4
36	331,8	—	339

Cemento Portland a lenta presa, Gavelli, Modigliana, Toscana.

Calce % 64,05.
Perdita al fuoco del cem. indur. 14,72 %.
Cem. impieg. { prima della presa gr. 7,81 / dopo la presa . » 9,16

Prima della presa		Dopo la presa	
Alcalinità dei cementi	Alcalinità totale della soluzione	Alcalinità dei cementi	Alcalinità totale della soluzione
19,6	362	24,2	354,2
28	345,8	38	359,2
20	358	28,6	350,2
28	353	36	352
34	354	42	342
27	349,4	40	345
20	349,4	31,8	347,2
13	351,4	17,8	337,2
13,4	348	18,2	342

Cemento Portland 1ª qualità extra, Fabbrica di Casalmonferrato.

Calce °/₀ 62,74.
Perdita al fuoco del cem. indur. 19,25 °/₀.
Cem. impieg. { prima della presa gr. 7,96 / dopo la presa » 9,86

Prima della presa		Dopo la presa	
Alcalinità dei cementi	Alcalinità totale della soluzione	Alcalinità dei cementi	Alcalinità totale della soluzione
57	323,6	27	333,6
61	322	28	329
66	328	43	319
74	320	35	317,6
74,8	319,6	49	320
68	317,4	43,8	312
64	313,6	40,6	312,2
68	322,4	45,8	320
60	—	44	316,4

Cemento a rapida presa, Marchino e C.º, Casalmonferrato.

Calce °/₀ 56,31.
Perdita al fuoco del cem. indur. 19,60 °/₀.
Cem. impieg. { prima della presa gr. 8,87 / dopo la presa . » 10,93

Prima della presa		Dopo la presa	
Alcalinità dei cementi	Alcalinità totale della soluzione	Alcalinità dei cementi	Alcalinità totale della soluzione
28	326	34	317,8
28	310	36	308,2
39	313,6	40	319,6
34	314	42	312,6
37	312,6	48	301,6
36	—	54	300
41	308,4	40	310,6
41	296	42,8	307,6
37	296	42	300,4

Cemento Portland 1ª qualità, marca A, Società Anonima di Casalmonferrato.

Calce °/₀ 64,01.
Perdita al fuoco del cem. indur. 19,57 °/₀
Cem. impieg. { prima della presa gr. 7,818 / dopo la presa . » 9,71

Prima della presa		Dopo la presa	
Alcalinità dei cementi	Alcalinità totale della soluzione	Alcalinità dei cementi	Alcalinità totale della soluzione
68	324,6	22,9	352,4
64	346	23,4	340
74	339,6	28	338,4
82,6	336	34	329
75,6	349	—	350,6
81	345	34	349
82	353	33	354
74	351	36	354
72	340,4	38	354,1

Cemento Portland a rapida presa, Schifferdecker und Söhne, Heidelberg.

Calce °/₀ 57,85.
Perdita al fuoco del cem. indur. 18,37 °/₀.
Cem. impieg. { prima della presa gr. 8,65 / dopo la presa » 10,58

Prima della presa		Dopo la presa	
Alcalinità dei cementi	Alcalinità totale della soluzione	Alcalinità dei cementi	Alcalinità totale della soluzione
14	349	14	361
20	346,6	15,8	351,6
20	349,6	33	345
34	354,2	48,6	353,6
18,8	357	36	349,4
22	350	36,2	340
24	352	49	342
35,6	356,2	52	350,2
40	347	57	348,8

Cemento romano a rapidissima presa, Gavelli, Modigliana, Toscana.

Calce % 55,92.
Perdita al fuoco del cem. indur. 18,57 %.
Cem. impieg. { prima della presa gr. 8,96
{ dopo la presa . » 11

Prima della presa		Dopo la presa	
Alcalinità dei cementi	Alcalinità totale della soluzione	Alcalinità dei cementi	Alcalinità totale della soluzione
17	356	18	354
33	361	37	355
32	360	38	342
25,6	345,6	34,4	341,6
23	352	36,4	346
28	343,4	45	343
51,6	341	62	340
51	340	60	339,6
44	354	50	341

Cemento a pronta presa, Società Anonima, Casalmonferrato.

Calce % 60,69.
Perdita al fuoco del cem. indur. 18,44 %.
Cem. impieg. { prima della presa gr. 8,22
{ dopo la presa . » 10,10

Prima della presa		Dopo la presa	
Alcalinità dei cementi	Alcalinità totale della soluzione	Alcalinità dei cementi	Alcalinità totale della soluzione
40	313,6	29	306,2
50	324	32,10	315,6
54	314	30	316,8
52	316,4	40	319,6
51	323,6	38	315,6
51	325,6	32	315
53	—	48	317,8
52	328	43	319,4
53	317	47	312

« I risultati di queste esperienze crediamo ci autorizzino a ricavare alcune conclusioni sui fenomeni che avvengono durante la presa.

« Per i cementi a lenta presa, mentre nella composizione centesimale non si riscontrano notevoli differenze tra quegli italiani e gli esteri, queste differenze esistono invece e costantemente nel loro comportamento rispetto alla soluzione di K_2CO_3.

« Sia nei tre campioni tedeschi, che nei due francesi prima della presa, l'alcalinità è scarsa e tra la prima e l'ultima determinazione o resta inalterata, o s' inalza di poco:

Prima della presa.

	Dyckerhoff,	Schifferdecker,	Mannheimer,	Pelloux, (lenta)	Pelloux (lentissima).
1ª determinazione . .	36	27	40	17	20
9ª id. . .	35	42,4	45	18,4	33

dopo la presa invece aumenta, e, ciò che è ancora più notevole, l'aumento è continuo nelle successive unità di tempo:

Dopo la presa.

	Dyckerhoff,	Schifferdecker,	Mannheimer,	Pelloux, (lenta)	Pelloux (lentissima).
1ª determinazione . .	59	44	55	34,4	26
9ª id . .	90	89,4	93,2	77	61

Crediamo quindi che si possa ritenere che in questi cementi esteri prima della presa non esistano affatto o soltanto in piccola quantità calce libera e sali polibasici disgregabili.

« Dopo la presa si formano appunto di questi sali, sono essi che la determinano, ed hanno la proprietà di decomporsi lentamente e continuamente per l' azione del carbonato potassico.

« E cercando delle analogie, siamo indotti a ritenere che, come per la calce i cementi dopo la presa per l'azione dell'acqua e dell'anidride carbonica dell'aria tendono a ritornare allo stato di sali neutri.

« Fra i cementi italiani a lenta abbiamo trovato che soltanto il Portland 2ª qualità della Società anonima di Casalmonferrato ha comportamento perfettamente paragonabile a quello dei cementi esteri; difatti in esso l' alcalinità si trova:

	Prima della presa	Dopo la presa
1ª determinazione . . .	21,4	26
8ª id. . . .	31	77

Gli altri hanno un comportamento del tutto diverso.

« Nel cemento a lenta di Marchino l' alcalinità è molto elevata anche prima della presa; però essa non aumenta di molto, nè dopo, nè nelle successive unità di tempo:

	Prima della presa	Dopo la presa
1ª determinazione . . .	55	60
8ª id. . . .	70	78

« Nel cemento Gavelli l' alcalinità è scarsa sia prima che dopo la presa, ma il comportamento è quasi identico:

	Prima della presa	Dopo la presa
1ª determinazione . . .	19,6	24,2
8ª id. . . .	13,4	18,2

« Nei due cementi 1ª qualità extra, fabbrica di Casalmonferrato e 1ª qualità marca A della Società Anonima di Casalmonferrato (che sono tra i 14 cementi da noi studiati, i soli che offrono resistenza alla pressione superiore a kg. 5 per mmq.) l' alcalinità è maggiore prima della presa, ma il comportamento nelle successive unità di tempo è analogo a quello dei due precedenti, poichè non aumenta di molto:

Fabbrica Casale.

	Prima della presa	Dopo la presa
1ª determinazione . . .	57	27
9ª id. . . .	60	44

Società Anonima.

	Prima della presa	Dopo la presa
1ª determinazione . . .	68	22,9
9ª id. . . .	72	38

È da ritenere quindi che questi due ultimi contengano discrete quantità di calce libera prima della presa, e che in tutti e quattro i campioni da noi studiati questo fenomeno sia dovuto principalmente ad un processo d'idratazione; mentre sali polibasici disgregabili con la presa non se ne formano, o soltanto in piccole quantità.

« I cementi a rapida presa che abbiamo studiati (3 italiani e 1 tedesco) si sono comportati allo stesso modo. In essi dopo la presa l' alcalinità non aumenta affatto o soltanto di poco, e gli aumenti nelle successive unità di tempo nei due stati sono piccoli, ma quasi uguali. E quindi da ritenere che in essi la presa sia dovuta principalmente ad un processo d' idratazione, e che tanto prima che dopo quel fenomeno contengano quantità piccole e quasi uguali di sali polibasici disgregabili.

« Altre conclusioni potrebbero ricavarsi dallo studio del comportamento dell' alcalinità totale, che in alcuni cementi diventa molto inferiore al valore 357,6 della soluzione primitiva di K_2CO_3; ma per ora tralasciamo di farlo ».

Petrografia. — *Sulle Comenditi, nuovo gruppo di rioliti con aegirina.* Nota preliminare di S. Bertolio, presentata dal Socio A. Cossa.

« Queste rioliti si trovano nella parte settentrionale dell'isola di S. Pietro (Sardegna) dove ricoprono una superficie abbastanza estesa nella località detta di Comende. Esse sono di color biancastro, rudi al tatto e racchiudono nella loro massa degli abbondanti cristallini di feldispato opalescente e dei minuti frammenti di cristalli colorati. Il quarzo bipiramidato trovasi in elementi di dimensioni notevoli e ben visibili ad occhio nudo. I cristalli intratellurici sono avvolti in un magma a struttura microlitica pochissimo pronunciata e ricco invece di sferuliti a croce nera e negativi e di quarzo spugnoso. I rari microliti visibili al microscopio, sono di sanidino.

« I cristalli intratellurici più abbondanti sono di sanidino e di quarzo. Il sanidino si mostra in elementi perfettamente limpidi e conservati, geminati soventi secondo la legge di Carlsbad; il quarzo bipiramidato si presenta in elementi poco corrosi, ricchi di interessanti inclusioni vetrose con bolla che riproducono nel loro contorno la forma del cristallo inglobante e nel quale esse si trovano identicamente orientate [1].

« Gli elementi colorati più abbondanti sono di aegirina, ma le roccie di Comende contengono inoltre dell'orneblenda ed un anfibolo sodico del gruppo dell'arfvedsonite.

[1] Le inclusioni vetrose dei quarzi delle rioliti di Comende furono esaminate in alcune mie preparazioni dal prof. Lacroix di Parigi al quale debbo la loro determinazione.

« L'aegirina è generalmente in piccoli elementi, soventi però con forme esterne perfettamente conservate. Nel processo di differenziazione del magma essa è anteriore alla cristallizzazione del feldispato, nel quale mostrasi talvolta allo stato di inclusione. I caratteri ottici dell'aegirina nelle roccie di Comende sono normali.

« L'orneblenda è meno frequente dell' aegirina, ma si presenta in cristalli di dimensioni più notevoli, privi però di qualsiasi contorno geometrico. Il pleocroismo delle sezioni è forte e secondo:

n_g bruno n_p giallo verde.

« Lungo i bordi delle sezioni di orneblenda e nei piani di sfaldatura, si nota la presenza di materia ferruginosa, probabile indizio di un principio di decomposizione.

« L'anfibolo del tipo arfvedsonite si presenta sempre in piccole plagette, di cui però alcune, mostrandosi identicamente orientate. lasciano supporre l'esistenza di grandi cristalli stati dal magma parzialmente distrutti. Le plagette sono, infatti, a contorni assai irregolari e mostrano le traccie dei piani di sfaldatura parallele alla direzione d'allungamento posseduta dal cristallo primitivo. Il pleocroismo di quest'anfibolo è energico e riferito alle traccie dei piani di sfaldatura, in direzione parallela al piano di polarizzazione è turchino cupo, mentre nella direzione perpendicolare è verde sporco.

« A luce polarizzata le sezioni mostrano una debole birefringenza e l'estinzione, per rapporto all'allungamento dei cristalli, si compie sotto angoli di pochi gradi. Nella stessa direzione il segno è negativo, senza però che sia possibile, a causa dell'intenso pleocroismo, di determinare quale asse giaccia press'a poco nella zona di allungamento.

« Infine un saggio coll'acido idrofluosilicico eseguito sopra una sezione isolata di questo anfibolo, vi ha svelato la presenza della soda.

« Oltre ai principali cristalli citati, le roccie di Comende contengono allo stato accessorio della micropegmatite in sezioni geometriche, dei zirconi, della magnetite, dello sfeno, dell'apatite ed affatto accidentalmente un feldispato listato e della tridimite.

« *Conclusione.* — La descrizione data delle roccie di Comende, benchè affatto sommaria, dimostra l'esistenza in quella regione di rioliti con aegirina. Queste roccie costituiscono un tipo petrografico affatto nuovo, che trova il suo corrispondente nella serie effusiva meno acida nelle pantelleriti, nelle fonoliti e nelle trachiti a aegirina.

« Secondo il prof. Zirkel è probabile che roccie analoghe esistano in altre località, dove il pirossene verde, che è in realtà dell'aegirina, è stato forse mal compreso e determinato come dell'augite comune [1].

[1] Lettera del prof. Zirkel all'autore.

« La presenza di anfibolo sodico nelle rioliti con aegirina di Comende, rende le roccie di quella località affatto tipiche e per seguire le abitudini moderne, propongo che esse siano chiamate *Comenditi*, e che diano il nome alla nuova serie petrografica messa in luce.

PERSONALE ACCADEMICO

Pervenne all'Accademia la dolorosa notizia della morte del Socio straniero Tommaso Huxley, mancato ai vivi il 29 giugno 1895; apparteneva il defunto Socio all'Accademia sino dal 25 aprile 1878.

ELEZIONI DI SOCI

Colle norme stabilite dallo Statuto e del Regolamento, si procedette alle elezioni di Socî e Corrispondenti dell'Accademia. Le elezioni dettero i risultati seguenti per la Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali:

Furono eletti Socî nazionali:

Nella Categoria IV, per la *Fisiologia:* Luciani Luigi; per la *Patologia:* Tizzoni Guido.

Furono eletti Corrispondenti:

Nella Categoria I, per la *Matematica:* Cesàro Ernesto; per l'*Astronomia*: Riccò Annibale.

Nella Categoria III, per la *Geologia* e *Paleontologia:* De Stefani Carlo.

Furono inoltre eletti Soci stranieri:

Nella Categoria I, per la *Matematica:* Jordan Camillo e Salmon Giorgio; per l'*Astronomia:* Newcomb Simone.

Nella Categoria II, per la *Fisica:* Wild Henrich J.

Nella Categoria IV, per la *Morfologia:* Kölliker Alberto.

L'esito delle votazioni venne proclamato dal Presidente con circolare del 18 luglio 1895; le nomine dei Socî nazionali e stranieri furono sottoposte all'approvazione di S. M. il Re.

P. B.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia prima del 4 agosto 1895.

Fisica matematica. — *Sul teorema di Kirchhoff.* Nota del Socio Eugenio Beltrami.

« Riflettendo nuovamente sul soggetto della precedente mia Comunicazione, ho riconosciuto che il teorema di Kirchhoff si fonda essenzialmente sopra una pura e semplice identità analitica, alla quale soddisfa ogni funzione $U(x, y, z, r)$ delle tre coordinate rettangole x, y, z d'un punto variabile e della distanza r di questo da un punto fisso arbitrario.

« Se si designano colla caratteristica ∂ le derivate *parziali* rispetto agli argomenti x, y, z, r e colla caratteristica d le derivate *totali* o *di direzione*, si ha:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial r}\frac{dx}{dr}$$

ed anche:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial x}\right)=\frac{1}{r}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial r}\frac{dx}{dr}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dr}.$$

Sommando le tre eguaglianze del tipo di quest'ultima, si trova:

$$\sum\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial x}\right)=\frac{1}{r}\Delta_2 U+\frac{1}{r}\left\{\frac{d}{dr}\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)-\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}\right\}-\frac{1}{r^2}\left\{\frac{dU}{dr}-\frac{\partial U}{\partial r}\right\},$$

risultato cui giova dare la forma seguente:

$$(1)\quad \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(U-r\frac{\partial U}{\partial r}\right)+\sum\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial x}\right)+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}-\Delta_2 U\right)=0.$$

« È questa l'identità analitica cui alludevo.

« Sia U funzione monodroma, continua e finita, colle sue derivate prime, in un determinato campo S, limitato da una o più superficie σ. Se, dopo aver moltiplicato (1) per dS, s'integra sul predetto campo, osservando che, per il teorema di Gauss ricordato nell'altra Nota, si ha:

$$\int \frac{d}{dr}\left(U - r\frac{\partial U}{\partial r}\right)\frac{\partial S}{r^2} = \int \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{U}{r}\right)\frac{dr}{dn}\,d\sigma - (\sigma)_0\,U_0\,,$$

dove U_0 è il valore di U nel punto fisso $(r=0)$, e che, per un altro notissimo teorema (caso particolare del precedente), si ha pure:

$$\int dS \sum \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial x}\right) = -\int \frac{U_n}{r}\,d\sigma\,, \qquad \left(U_n = \sum \frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dn}\right)$$

si ottiene senz'altro:

$$(2) \qquad (\sigma)_0\,U_0 = \int \left\{ \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{U}{r}\right)\frac{dr}{dn} - \frac{U_n}{r} \right\} d\sigma + \int \left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} - \Delta_2 U\right)\frac{dS}{r}\,.$$

« Questa formola esprime ciò che a buon diritto parmi potersi chiamare il teorema di Kirchhoff (in cui rientra quello di Green, nel caso che U non contenga r).

« Se $\varphi(x, y, z, t)$ è una funzione che soddisfa all'equazione differenziale dei moti vibratorii:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 \Delta_2 \varphi$$

e se si designa con U ciò che diventa questa funzione sostituendo $t - r{:}a$ al posto di t, si ha:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} = \Delta_2 U\,, \qquad U_0 = \varphi(x_0, y_0, z_0, t)$$

e l'equazione (2) si riduce a quella con cui Kirchhoff esprime il princìpio di Huygens.

« L'identità (1) della presente Nota non differisce sostanzialmente dalla (b) della precedente. Ma la forma (1) permette di stabilire il teorema (2) con una sola applicazione della formola di Gauss, mentre questa dovette essere invocata a due riprese nella deduzione della Nota precedente ».

Matematica. — *Sulle operazioni funzionali distributive.* Nota del dott. Benedetto Calò, presentata dal Corrispondente Volterra.

« 1. In una comunicazione recentissima del prof. Pincherle inserita fra questi Rendiconti [1], l'autore si è occupato delle operazioni fun-

[1] V. Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 17 febbraio 1895.

zionali distributive di una funzione arbitraria, e ha dato un'espressione molto elegante per la funzione ottenuta da una tale operazione funzionale; indicando con $A(\varphi)$ un'operazione funzionale eseguita sulla funzione arbitraria analitica $\varphi(t)$ e supponendo che per essa valga la proprietà distributiva, cioè:

$$A(\varphi + \psi) = A(\varphi) + A(\psi) \,,$$

ha espresso la funzione $A(\varphi)$ in serie sotto la forma seguente:

$$(1)\quad A(\varphi) = A(1)\,.\,\varphi + A'(1)\frac{\varphi'}{1} + A''(1)\cdot\frac{\varphi''}{1\,.\,2} + \cdots + A^{(\nu)}(1)\cdot\frac{\varphi^{(\nu)}}{\nu\,!} + \cdots,$$

ove φ', φ'', ... $\varphi^{(\nu)}$, ... rappresentano rispettivamente le ordinarie derivate $\frac{d\varphi}{dt}, \frac{d^2\varphi}{dt^2}, \ldots \frac{d^\nu\varphi}{dt^\nu}, \ldots$; mentre A', A'', ... $A^{(\nu)}$ ... rappresentano le derivate funzionali dell'operazione A, definite dal prof. Pincherle mediante la formola

$$A'(\varphi) = A(t\varphi) - x\,A(\varphi)\,,$$

per modo che i coefficienti della serie precedente risultano funzioni della variabile x, che, eseguita l'operazione A, viene a surrogare la variabile t.

« Nella presente Nota ci proponiamo di estendere in due diversi sensi la formola del prof. Pincherle [1].

« 2. Una prima estensione si ottiene considerando le operazioni funzionali A da eseguirsi sopra un numero qualunque n di funzioni arbitrarie analitiche $\varphi_1(t_1)$, $\varphi_2(t_2)$, ... $\varphi_n(t_n)$, supponendo che tali operazioni *siano distributive rispetto a ciascuna funzione* φ *separatamente*; tale proprietà si esprimerà scrivendo la relazione

$$A(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_i + \psi_i, \ldots \varphi_n) = A(\varphi_1, \ldots \varphi_i, \ldots \varphi_n) + A(\varphi_1, \ldots \psi_i, \ldots \varphi_n)\,,$$

che porta di conseguenza all'altra

$$A(\varphi_1, \varphi_2, \ldots c_i\varphi_i, \ldots \varphi_n) = c_i\,.\,A(\varphi_1, \ldots \varphi_i, \ldots \varphi_n)$$

ove c_i è una costante. — In generale, eseguita l'operazione A, il risultato $A(\varphi_1, \ldots \varphi_n)$ sarà una funzione in cui le variabili $t_1, t_2, \ldots t_n$ saranno surrogate da altre variabili $x_1, x_2 \ldots x_n$, le quali, per classi speciali di operazioni funzionali, potranno coincidere tutte o in parte colle variabili antiche, od anche coincidere tutte o in parte fra loro; e potrà anche avvenire che a queste variabili si venga ad aggiungere un certo numero di parametri.

« Chiameremo *derivata funzionale parziale* dell'operazione A, rispetto ad una qualunque φ_i delle funzioni arbitrarie, l'espressione seguente:

$$A(\varphi_1, \varphi_2, \ldots t_i\varphi_i, \ldots \varphi_n) - x_i\,A(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n)$$

e l'indicheremo col simbolo $\frac{\partial A}{\partial \varphi_i}$; avremo subito la proprietà

$$\frac{\partial^2 A}{\partial\varphi_i\,\partial\varphi_s} = \frac{\partial^2 A}{\partial\varphi_s\,\partial\varphi_i}$$

[1] V. una Nota del prof. Pincherle, presentata all'Accademia di Torino il 23 giugno 1895.

ossia l'*invertibilità delle derivazioni funzionali*. Eseguendo m_1 volte la derivazione parziale di A rispetto a φ_1, otterremo

$$(2) \qquad \frac{\partial^{m_1} A}{\partial \varphi_1^{m_1}} = \sum_{0}^{m_1}{}_{r_1} (-1)^{r_1} \binom{m_1}{r_1} . A\left(t_1^{m_1-r_1} \varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n\right) . x_1^{r_1} ,$$

derivando in seguito m_2 volte quest'espressione rispetto a φ_2 otterremo in modo analogo

$$\frac{\partial^{m_1+m_2} A}{\partial \varphi_1^{m_1} \partial \varphi_2^{m_2}} =$$

$$= \sum_{0}^{m_1}{}_{r_1} \sum_{0}^{m_2}{}_{r_2} (-1)^{r_1+r_2} \binom{m_1}{r_1} \binom{m_2}{r_2} . A\left(t_1^{m_1-r_1} \varphi_1, t_2^{m_2-r_2} \varphi_2, \varphi_3, \dots \varphi_n\right) x_1^{r_1} x_2^{r_2},$$

procedendo collo stesso metodo avremo la formola generale seguente

$$(3) \qquad \frac{\partial^{m_1+m_2+\dots+m_n} A}{\partial \varphi_1^{m_1} \partial \varphi_2^{m_2} \dots \partial \varphi_n^{m_n}} =$$

$$= \sum_{0}^{m_1}{}_{r_1} \dots \sum_{0}^{m_n}{}_{r_n} (-1)^{r_1+\dots+r_n} \binom{m_1}{r_1} \dots \binom{m_n}{r_n} . A\left(t_1^{m_1-r_1} \varphi_1 \dots t_n^{m_n-r_n} \varphi_n\right) . x_1^{r_1} \dots x_n^{r_n}$$

dalla quale pure risulta manifesta l'invertibilità delle derivazioni funzionali; questa formola vale per ogni sistema di valori di m_1, m_2, m_n, purchè si ponga $\binom{m}{0} = 1$, $\binom{0}{0} = 1$.

« 4. Limitiamoci ora, per semplicità di scrittura al caso di $n = 2$. Sia dunque $A(\varphi_1, \varphi_2)$ un'operazione funzionale sulle due funzioni arbitrarie $\varphi_1(t_1)$, $\varphi_2(t_2)$, che goda rispetto a ciascuna di queste della proprietà distributiva, proprietà che darà luogo alla relazione seguente

$$A(\varphi_1 + \psi_1, \varphi_2 + \psi_2) = A(\varphi_1, \varphi_2) + A(\varphi_1, \psi_2) + A(\psi_1, \varphi_2) + A(\psi_1, \psi_2).$$

Applicando la formola (1) come formola ricorrente, si può esprimere $A(t_1^p \varphi_1, \varphi_2)$ (con p intero positivo) in funzione di $A(\varphi_1, \varphi_2)$ e delle sue derivate parziali rispetto a φ_1; avremo cioè:

$$(4) \left\{ \begin{array}{l} A(t_1 \varphi_1, \varphi_2) = x_1 A + \dfrac{\partial A}{\partial \varphi_1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ A(t_1^p \varphi_1, \varphi_2) = x_1^p A + p x_1^{p-1} \dfrac{\partial A}{\partial \varphi_1} + \binom{p}{2} x_1^{p-2} \dfrac{\partial^2 A}{\partial \varphi_1^2} + \dots + \dfrac{\partial^p A}{\partial \varphi_1^p} ; \end{array} \right.$$

analogamente avremo

$$(4') \left\{ \begin{array}{l} A(\varphi_1, t_2 \varphi_2) = x_2 A + \dfrac{\partial A}{\partial \varphi_2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ A(\varphi_1, t_2^q \varphi_2) = x_2^q A + q x_2^{q-1} \dfrac{\partial A}{\partial \varphi_2} + \binom{q}{2} x_2^{q-2} \dfrac{\partial^2 A}{\partial \varphi_2^2} + \dots + \dfrac{\partial^q A}{\partial \varphi_2^q} . \end{array} \right.$$

« Si abbiano ora due serie di potenze rispettivamente nelle variabili t_1, t_2.

$$\pi_1 = \sum_{p=o}^{\infty} a_p t_1^p \ , \quad \pi_2 = \sum_{q=o}^{\infty} b_q t_2^q$$

e formiamo intanto $A(\pi_1 \varphi_1, \varphi_2)$; poichè A gode della proprietà distributiva nel senso già indicato, avremo, tenendo conto delle formole (4)

$$A(\pi_1\varphi_1, \varphi_2) = \sum_{p=o}^{\infty} a_p \cdot A(t_1^p \varphi_1, \varphi_2) =$$

$$= \sum_{p=o}^{\infty} a_p \left\{ x_1^p A + p x_1^{p-1} \frac{\partial A}{\partial \varphi_1} + \binom{p}{2} x_1^{p-2} \frac{\partial^2 A}{\partial \varphi_1^2} + \dots + \frac{\partial^p A}{\partial \varphi_1^p} \right\},$$

dalla quale, ordinando rispetto ad A e alle sue derivate, otteniamo:

$$A(\pi_1\varphi_1, \varphi_2) = \sum_{i=o}^{\infty} \frac{\pi_1^{(i)}}{i!} \frac{\partial^i A}{\partial \varphi_1^i}; \tag{5}$$

se ora formiamo $A(\pi_1\varphi_1, \pi_2\varphi_2)$, avremo

$$A(\pi_1\varphi_1, \pi_2\varphi_2) = \sum_{i=o}^{\infty} \frac{\pi_1^{(i)}}{i!} \frac{\partial^i}{\partial \varphi_1^i} A(\varphi_1, \pi_2\varphi_2); \tag{6}$$

ma per una formola analoga alla (5) abbiamo

$$A(\varphi_1, \pi_2\varphi_2) = \sum_{k=o}^{\infty} \frac{\pi_2^{(k)}}{k!} \frac{\partial^k A}{\partial \varphi_2^k},$$

quindi sostituendo questa espressione nella (6) otterremo

$$A(\pi_1\varphi_1, \pi_2\varphi_2) = \sum_{i=o}^{\infty} \frac{\pi_1^{(i)}}{i!} \frac{\partial^i}{\partial \varphi_1^i} \sum_{k=o}^{\infty} \frac{\pi_2^{(k)}}{k!} \frac{\partial^k A}{\partial \varphi_2^k},$$

e derivando per serie avremo il risultato seguente:

$$A(\pi_1\varphi_1, \pi_2\varphi_2) = \sum_{i=o}^{\infty} \sum_{k=o}^{\infty} \frac{\pi_1^{(i)}}{i!} \frac{\pi_2^{(k)}}{k!} \frac{\partial^{i+k} A}{\partial \varphi_1^i \partial \varphi_2^k};$$

se in questa formola poniamo

$$\varphi_1 = \varphi_2 = 1 \ , \quad \pi_1 = \varphi_1 \ , \quad \pi_2 = \varphi_2 \ ,$$

otteniamo finalmente

$$A(\varphi_1, \varphi_2) = \sum_{i=o}^{\infty} \sum_{k=o}^{\infty} \frac{\varphi_1^{(i)}}{i!} \frac{\varphi_2^{(k)}}{k!} \left(\frac{\partial^{i+k} A}{\partial \varphi_1^i \partial \varphi_2^k} \right)_{\varphi_1 = \varphi_2 = 1}.$$

« Tornando al caso generale di operazioni funzionali distributive eseguite

su n funzioni analitiche arbitrarie $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n$, è evidente che collo stesso metodo giungeremo a scrivere una formola analoga

$$(7) \quad A(\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n = \sum_{m_1, m_2 \dots m_n} C_{m_1, m_2 \dots m_n} \frac{\varphi_1^{(m_1)}}{m_1!} \frac{\varphi_2^{(m_2)}}{m_2!} \dots \frac{\varphi_n^{(m_n)}}{m_n!}$$

essendo

$$(8) \qquad C_{m_1, m_2, \dots m_n} = \left(\frac{\partial^{m_1+m_2+\dots+m_n} A}{\partial \varphi_1^{m_1} \partial \varphi_2^{m_2} \dots \partial \varphi_n^{m_n}} \right)_{\varphi_1=\varphi_2=\dots=\varphi_n=1} .$$

« Questo risultato che appare una naturale estensione della formola trovata dal prof. Pincherle ha, come quella, un valore puramente formale; per l'applicazione effettiva si dovrà, per ogni singola operazione funzionale, limitare opportunamente il campo di arbitrarietà delle funzioni φ e π. I coefficienti della serie multipla precedente risultano funzioni delle variabili $x_1, x_2, \dots x_n$ e potremo ottenere la loro espressione dalla formola (3), avremo cioè

$$C_{m_1, m_2 \dots m_n} =$$
$$= \sum_{0}^{m_1}{}_{r_1} \dots \sum_{0}^{m_n}{}_{r_n} (-1)^{r_1+\dots+r_n} \binom{m_1}{r_1} \dots \binom{m_n}{r_n} . A(t_1^{m_1-r_1}, \dots t_n^{m_n-r_n}) . x_1^{r_1} \dots x_n^{r_n} .$$

« 5. Guardiamo ora in che relazione sta lo sviluppo (7) trovato precedentemente con i risultati generali ottenuti dal prof. Volterra nella prima di una serie di Note pubblicate fra questi Rendiconti (¹). Sotto certe condizioni di continuità il prof. Volterra ha espresso l'operazione funzionale più generale sopra una funzione arbitraria $\varphi(t)$ di variabile reale nella forma seguente

$$(9) \qquad A\Big(\varphi(x)\Big) = M_o +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \dots \int_A^B \dots \int M_n(x; t_1, t_2, \dots t_n) \dots \varphi(t_1) . \varphi(t_2) \dots \varphi(t_n)\, dt_1 . dt_2 \dots . dt_n,$$

cioè come una serie d'integrali semplici, doppî, ..., essendo sempre lo stesso l'intervallo d'integrazione; le funzioni $M_n(x; t_1, t_2, \dots t_n)$ sono quelle che il prof. Volterra definisce come derivate d'ordine n dell'operazione funzionale A ed hanno la proprietà di esser simmetriche rispetto agli n parametri $t_1, t_2, \dots t_n$. Ora indichiamo con I_n l'integrale che comparisce nel termine generico di questa serie, cioè poniamo

$$I_n = \int \dots \int_A^B \dots \int M_n(x; t_1, t_2 \dots t_n)\, \varphi(t_1)\, \varphi(t_2) \dots \varphi(t_n)\, dt_1\, dt_2 \dots dt_n$$

e consideriamo l'espressione

$$J_n = \int \dots \int_A^B \dots \int M_n(x; t_1 \dots t_n)\, \varphi_1(t_1) . \varphi_2(t_2) \dots \varphi_n(t_n)\, dt_1\, dt_2 \dots dt_n$$

(¹) Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 2° semestre 1887.

ottenuta da I_n col sostituirvi all'unica funzione φ le n funzioni distinte $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n$; la J_n è evidentemente un'operazione funzionale sulle $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n$ e distributiva rispetto a ciascuna di esse, quindi si potrà sviluppare formalmente secondo le formole (7), (8); avremo cioè

$$(10) \qquad J_n = \sum_{m_1, m_2 \dots m_n} C_{m_1, m_2, \dots m_n} \frac{\varphi_1^{(m_1)}}{m_1!} \frac{\varphi_2^{(m_2)}}{m_2!} \dots \frac{\varphi_n^{(m_n)}}{m_n!}$$

ove i coefficienti avranno l'espressione seguente

$$C_{m_1, m_2 \dots, m_n} =$$

$$= \sum_{0}^{m_1}{}_{r_1} \dots \sum_{0}^{m_n}{}_{r_n} (-1)^{r_1 + \dots + r_n} \binom{m_1}{r_1} \dots \binom{m_n}{r_n} x^{r_1 + \dots + r_n} \int \dots \int_A^B \dots \int M_n . t_1^{m_1 - r_1} \dots t_n^{m_n - r_n} dt_1 \dots dt_n$$

$$= \int \dots \int_A^B \dots \int M_n . (t_1 - x)^{m_1} (t_2 - x)^{m_2} \dots (t_n - x)^{m_n} dt_1 \dots dt_2 \dots dt_n$$

« Per passare ora da J_n ad I_n basterà nella (10) porre di nuovo $\varphi_1 = \varphi_2 = \dots = \varphi_n = \varphi$ ed otterremo

$$(11) \qquad I_n = \sum_{m_1 m_2 \dots m_n} C_{m_1, m_2 \dots m_n} \frac{\varphi^{(m_1)}}{m_1!} \frac{\varphi^{(m_2)}}{m_2!} \dots \frac{\varphi^{(m_n)}}{m_n!} ;$$

così abbiamo ottenuto lo sviluppo formale del termine n^{esimo} della serie del prof. Volterra in una serie multipla dell'ordine n ordinata per le derivate della funzione φ; ora i varii termini I_n della serie (10) considerati come operazioni funzionali sulla funzione φ, hanno proprietà di ordine più elevato a seconda che si progredisce nella serie: così I_1 è un'operazione funzionale distributiva

$$I_1(\varphi + \psi) = I_1(\varphi) + I_1(\psi) ,$$

e la formola (11) ne dà, per $n = 1$, lo sviluppo dovuto al prof. Pincherle; I_2 non godrà più della proprietà distributiva; ma se si considera J_2, questa sarà distributiva rispetto a φ_1, φ_2 separatamente, cioè:

$$J_2(\varphi_1 + \psi_1, \varphi_2 + \psi_2) = J_2(\varphi_1, \varphi_2) + J_2(\varphi_1, \psi_2) + J_2(\psi_1, \varphi_2) + J_2(\psi_1, \psi_2)$$

e tornando ad I_2 col porre $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$, $\psi_1 = \psi_2 = \psi$ e notando che $J_2(\varphi, \psi) = J_2(\psi, \varphi)$, avremo per I_2 la proprietà

$$I_2(\varphi + \psi) = I_2(\varphi) + I_2(\psi) + 2\, J_2(\varphi, \psi) ;$$

analogamente I_3 godrà della proprietà

$$I_3(\varphi + \psi) = I_3(\varphi) + 3\, J_3(\varphi, \varphi, \psi) + 3\, J_3(\varphi, \psi, \psi) + I_3(\psi)$$

e così di seguito con legge evidente.

« 6. Lo sviluppo (11) trovato per queste operazioni funzionali I_n che

godono di una proprietà più complicata che non sia la distributiva si può ottenere anche direttamente nel seguente modo comunicatomi dal prof. Volterra. Consideriamo per semplicità il caso di $n=2$,

$$I_2=\int_A^B\int_A^B M_2(x\,,t_1\,,t_2)\,\varphi(t_1)\,.\,\varphi(t_2)\,dt_1\,.\,dt_2$$

e sviluppiamo $\varphi(t_1)$, $\varphi(t_2)$ in serie di Taylor

$$\varphi(t_1)=\sum_{m_1=0}^{\infty}\frac{\varphi^{(m_1)}(x)}{m_1!}(t_1-x)^{m_1}\;,\quad \varphi(t_2)=\sum_{m_2=0}^{\infty}\frac{\varphi^{(m_2)}(x)}{m_2!}(t_2-x)^{m_2}$$

e sostituiamo questi sviluppi nella I_2; avremo, integrando termine a termine,

$$I_2=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{m_2=0}^{\infty}\frac{\varphi^{(m_1)}(x)}{m_1!}\frac{\varphi^{(m_2)}(x)}{m_2!}\int_A^B\int_A^B M_2(x_1\,t_1\,,t_2)\,(t_1-x)^{m_1}(t_2-x)^{m_2}\,.\,dt_1\,dt_2$$

formola che coincide appunto con quella trovata sopra.

7. La signorina Fabbri, in alcune sue ricerche sulle funzioni dipendenti da altre funzioni, (1) ha esteso i risultati del prof. Volterra considerando l'operazione funzionale più generale sopra più funzioni arbitrarie di variabili reali indipendenti $A\,[\varphi_1(t_1)\,,\varphi_2(t_2)\ldots\varphi_n(t_n)]$, e sotto certe condizioni di continuità ha espresso una tale operazione sotto forma di una serie ordinata per integrali n^{upli}, $2n^{\text{pli}}$, $3n^{\text{pli}}$ ....; soltanto l'integrale n^{plo} che rappresenta il termine di 1° ordine di questa serie gode della proprietà distributiva rispetto a ciascuna funzione φ separatamente, quindi esso si potrà sviluppare secondo la formola (7), ciò che si potrebbe verificare anche in modo diretto. La signorina Fabbri ha sviluppato ancora sotto forma analoga l'operazione funzionale più generale sopra una sola funzione di più variabili reali indipendenti $A[\varphi(t_1\,,t_2\,,\ldots t_n)]$; quì pure l'integrale n^{uplo} che rappresenta il termine di 1° ordine di questa serie, è il solo fra i termini della serie stessa che goda della proprietà distributiva; esso si potrà sviluppare formalmente in una serie n^{pla} come apparirà da quanto diremo nel Numero seguente.

« 8. Accenniamo ancora ad un'altra estensione di cui è suscettibile la formola data dal prof. Pincherle. Consideriamo cioè un'operazione A, eseguita sopra una funzione $\varphi(t_1\,,t_2\,,\ldots t_n)$ analitica a più variabili, e avente la proprietà distributiva

$$A(\varphi+\psi)=A(\varphi)+A(\psi)\;;\quad A(c\varphi)=cA(\varphi);$$

siano $x_1\,,x_2\,,\ldots x_n$ le variabili che, dopo eseguita l'operazione A vengono a surrogare le $t_1\,,t_2\,,\ldots t_n$; si potranno definire dell'operazione A n *derivate prime* mediante la solita formola

$$A(t_i\varphi)-x_iA(\varphi)\qquad(i=1\,,\;2\,,\;\ldots n)$$

(1) Atti della R. Accademia delle scienze di Torino, vol. XXV, 1889-90.

che diremo derivata *d'indice* i^{esimo}; potremo indicare queste derivate con degli indici alla lettera A; limitandoci, per semplicità di scrittura, al caso di $n=2$, avremo le due derivate

$$A_{10}(\varphi)=A(t_1\varphi)-x_1 A(\varphi)\ ,\quad A_{01}(\varphi)=A(t_2\varphi)-x_2 A(\varphi)\,;$$

ancora varrà l'invertibilità delle derivazioni, quindi potremo indicare la derivata seconda mista col simbolo A_{11} senza alcuna ambiguità ed avremo

$$A_{11}(\varphi)=A(t_1\, t_2\, \varphi)-x_1\, A(t_2\, \varphi)-x_2 A(t_1\, \varphi)+x_1\, x_2\, A(\varphi)\,;$$

in generale la derivazione successiva, m_1 volte d'indice 1°, m_2 volte d'indice 2°, darà luogo all'espressione

$$A_{m_1 m_2}(\varphi)=\sum_{0}^{m_1}{}_{r_1}\sum_{0}^{m_2}{}_{r_2}(-1)^{r_1+r_2}\binom{m_1}{r_1}\binom{m_2}{r_2}.\,A(t_1^{m_1-r_1}t_2^{m_2-r_2}\varphi)\,x_1^{r_1}\,x_2^{r_2}$$

e applicando questa formola in modo ricorrente potremo calcolare $A(t_1^p t_2^q\varphi)$ in funzione di $A(\varphi)$ e delle sue derivate ed avremo

$$A(t_1^p t_2^q \varphi)=\sum_{0}^{p}{}_{r_1}\sum_{0}^{q}{}_{r_2}\binom{p}{r_1}\binom{q}{r_2}A_{r_1 r_2}\,x_1^{p-r_1}\,x_2^{q-r_2}\,,$$

« Consideriamo una serie doppia di potenze

$$\pi=\sum_{pq} a_{pq}\, t_1^p\, t_2^q$$

e formiamo $A(\pi\varphi)$; avremo

$$A(\pi\varphi)=\sum_{pq} a_{pq}\, A(t_1^p t_2^q\varphi)=\sum_{pq} a_{pq}\sum_{0}^{p}{}_{r_1}\sum_{0}^{q}{}_{r_2}\binom{p}{r_1}\binom{q}{r}A_{r_1 r_2}x_1^{p-r_1}\,x_2^{q-r_2}$$

ed ordinando rispetto alle derivate di A potremo scrivere

$$A(\pi\varphi)=\sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{\infty}A_{r_1 r_2}(\varphi)\sum_{p=r_1}^{\infty}\sum_{q=r_2}^{\infty}a_{pq}\binom{p}{r_1}\binom{q}{r_2}x_1^{p-r_1}\,x_2^{q-r_2}$$

$$=\sum_{r_1 r_2}\frac{A_{r_1 r_2}(\varphi)}{r_1\,!\;r_2\,!}\,\frac{\partial^{r_1+r_2}\pi}{\partial x_1^{r_1}\,\partial x_2^{r_2}}$$

« Facendo in questa formola $\varphi=1$, $\pi=\varphi$ otteniamo

$$A(\varphi)=\sum_{r_1 r_2}\frac{A^{(1)}_{r_1 r_2}}{r_1\,!\;r_2\,!}\,\frac{\partial^{r_1+r_2}\varphi}{\partial x_1^{r_1}\,dx_2^{r_2}}\,;$$

nel caso generale che φ sia funzione analitica di n variabili $t_1, t_2, \dots t_n$, avremo lo sviluppo formale

$$A(\varphi)=\sum_{r_1 r_2\dots r_n}\frac{A^{(1)}_{r_1 r_2\dots r_n}}{r_1!\;r_2!\dots r_n!}\,\frac{\partial^{r_1+r_2+\dots+r_n}\varphi}{\partial x_1^{r_1}\,dx_2^{r_2}\dots dx_n^{r_n}}$$

che si presenta come estensione naturale di quello trovato dal prof. Pincherle ».

Chimica fisica. — *Intorno alla ipotesi della colorazione degli joni* (1). Nota II di G. MAGNANINI, presentata dal Socio G. CIAMICIAN.

« In precedenti comunicazioni fatte a questa Accademia (2) io ho dimostrato che, per i sali colorati che subiscono in soluzione acquosa la dissociazione elettrolitica, lo spettro di assorbimento non si risente della dissociazione, o per lo meno non se ne risente in modo da ottenersi una variazione nelle condizioni da me sperimentate. Questo comportamento è particolarmente rimarchevole per i cromoossalati studiati da me assieme al dott. Bentivoglio, e maggiormente poi per i cromosolfocianati dei quali mi sono occupato recentemente (3). Ho concluso che le ricerche dell'Ostwald sulla eguaglianza degli spettri di assorbimento dei sali formati da uno stesso acido colorato o da una medesima base colorata, e da basi incolore ed acidi incolori, non sono prova della ipotesi della colorazione degli joni.

« Studiando poi il comportamento dell'acido violurico che mi diede soluzioni acquose incolore, ma che è notevolmente dissociato e dà sali colorati, conclusi che le proprietà di questa sostanza sono in contraddizione colla ipotesi della colorazione degli joni. Tale ricerca è stata ripresa nel Laboratorio del prof. Ostwald dal dott. Wagner (4), il quale, confermando le mie determinazioni per quanto riguarda la dissociazione dell'acido violurico, non ha ottenuto però soluzioni incolore di questa sostanza. Ho tardato a ritornare sopra l'argomento, perchè riprendendo il lavoro ho trovato che, in accordo coi risultati del dott. Wagner, l'acido violurico può dare soluzioni rosee anche quando si devono escludere traccie di alcali: le mie ricerche si sono rivolte a cercare una spiegazione delle differenze osservate, ed a questo non sono ancora riuscito (5).

« In questa Nota comunico brevemente le osservazioni fatte sopra alcuni acidi, nei quali la dissociazione elettrolitica è accompagnata da maggiore o minore cambiamento di colore, i quali dànno sali colorati ed il cui comportamento non si saprebbe altrimenti spiegare che ricorrendo alla ipotesi della colorazione degli joni.

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di chimica generale della R. Università di Modena.

(2) Vedi questi Rendiconti, annate 1891 e 1893.

(3) Vedi le Memorie della R. Accademia di scienze lettere ed Arti in Modena.

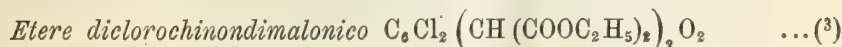
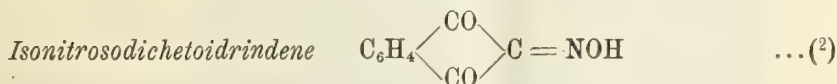
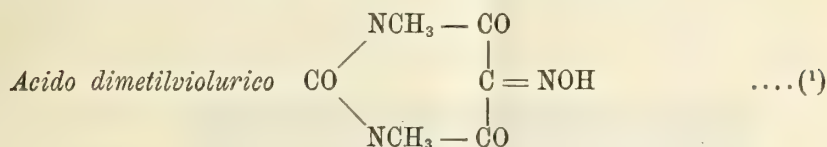
(4) *Ueber die Farbe der Ionen*, Zeit. f. phys. Ch. XII, 314.

(5) Questa differenza di comportamento non posso attribuirla a traccia di acidi minerali contenuta nell'acqua precedentemente adoperata, perchè tale acqua aveva reazione neutra. In queste esperienze mi sono trovato di fronte a un comportamento dell'acido violurico, ancora per me inesplicabile, ma del quale non escludo di potere a suo tempo trovare una spiegazione.

« Ho esaminato le seguenti sostanze aventi funzione acida:

Acido dimetilviolurico $CO\begin{cases} NCH_3 - CO \\ \qquad\quad | \\ \qquad\quad C = NOH \\ \qquad\quad | \\ NCH_3 - CO \end{cases}$ ....[1]

Isonitrosodichetoidrindene $C_6H_4\langle {CO \atop CO} \rangle C = NOH$ ...[2]

Etere diclorochinondimalonico $C_6Cl_2\left(CH\left(COOC_2H_5\right)_2\right)_2O_2$ ...[3]

« Venne determinata la conducibilità elettrica dell'acido dimetilviolurico e del dimetilviolurato potassico, a 25° in soluzione acquosa, e si ebbero questi risultati:

Acido dimetilviolurico				Dimetilviolurato potassico	
V	μ_v	100 m	100 k	V	μ_v
32	7,86	2,32	0,00159	40	82,5
64	10,9	3,11	0,00156	80	85,3
128	15,4	4,38	0,00157	160	87,9
256	21,7	6,17	0,00158	320	91,1
512	29,9	8,52	0,00156	640	92,7
$\mu_\infty = 352$		100 k = 0,00157		1280	96,3

« Come si vede l'acido dimetilviolurico è abbastanza dissociato, il suo coefficiente di affinità si può paragonare a quello dell'acido valerianico; la dissociazione è minore però di quella dell'acido violurico per il quale venne trovata la costante 100 k = 0,00272 alla medesima temperatura. Il suo sale potassico è come quello dell'acido violurico quasi completamente dissociato in soluzioni diluite. Per soluzioni equimolecolari dei due sali si osserva che il dimetilviolurato potassico esercita un assorbimento di poco inferiore a quello del violurato, e lascia passare maggior quantità di luce rossa; il violurato presenta, veduto per trasparenza, una colorazione più violetta. La differenza nei due spettri di assorbimento è però assai piccola come si può rilevare dalle fotografie eseguite con soluzioni equimolecolari ($\gamma = 40$) Fig. I.

« Le soluzioni di acido dimetilviolurico, che allo stato solido è perfettamente bianco, presentano pertanto minore colorazione di quelle dell'acido violurico corrispondenti, ciò che si può spiegare coll'ipotesi degli ioni colorati principalmente tenendo conto della minore dissociazione.

[1] Dalla caffeina, V. Andreasch, Monatshefte für Chemie XVI, 17.

[2] Ottenuto per azione di nitrito sodico in soluzione acida sopra il sale disodico dell'acido α. γ. dichetoidrinden-β-carbonico, V. Gabriel B. B. XXVI, 953.

[3] Dal difenossidiclorochinone per azione dell'etere sodiomalonico, V. H. S. Grindley und C. Loring Jackson B. B. XXVI, 397.

« Per l'isonitrosodichetoidrindene, che cogli acidi violurico e dimetilviolurico presenta una certa analogia di costituzione, io ho osservato che le soluzioni negli alcali sono meno intensamente colorate in rosso, di quelle dei

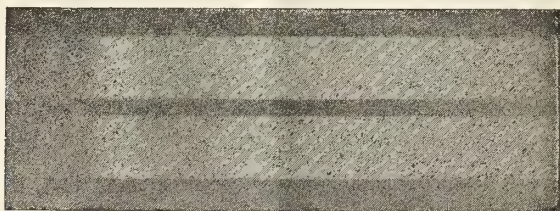
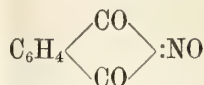



Fig. 1.

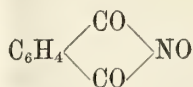
violurati e dimetilviolurati. Poichè la sostanza è di color giallo chiaro, coll'ipotesi degli joni colorati è da ritenersi che il colore rosso delle soluzioni alcaline dell'isonitrosodichetoidrindene, sia da ascriversi all'jone

$$C_6H_4\langle{}^{CO}_{CO}\rangle:NO$$

che queste soluzioni contengono, jone evidentemente meno intensamente colorato degli joni dell'acido violurico, e dimetilviolurico.

« Per le soluzioni acquose, anche diluite dell'isonitrosodichetoidrindene si osserva costantemente una tinta nettamente gialla; ammessa la colorazione dell'jone negativo era perciò da aspettarsi per tali soluzioni una conducibilità elettrica molto piccola. Infatti le determinazioni eseguite dettero i seguenti risultati:

V	μ_v	100 m	100 k
160	4,50	1,27	0,0000102
320	6,41	1,80	0,0000105
640	9,25	2,60	0,0000109
	$\mu_\infty = 355$		100 k = 0,0000105

« In causa della piccolissima dissociazione, e sopratutto della minore intensità di colorazione rossa dell'jone

$$C_6H_4\langle{}^{CO}_{CO}\rangle NO$$

in paragone degli joni degli acidi violurico e dimetilviolurico, le soluzioni dell'isonitrosodichetoidrindene conservano la colorazione gialla della parte non dissociata; se però si passa a soluzioni estremamente diluite e se ne esaminano grossi strati, si manifesta una colorazione aranciata, che è evidentemente l'indizio della presenza degli joni che si sono formati; la tinta rossa però non arriva a prevalere.

« Un comportamento tutto particolare, che è bellissimo esempio in favore della ipotesi dell'Ostwald, è presentato dall'etere diclorochinondimalonico. Questa sostanza che allo stato solido presenta colore giallo chiaro è, a freddo, nell'acqua quasi completamente insolubile; la soluzione satura presenta minima conducibilità elettrica. Se però si riscalda l'etere nell'acqua alla ebullizione, una piccola quantità della sostanza si scioglie: la soluzione acquista colorazione azzurra non intensa e conduce un po' meglio l'elettricità. Per raffreddamento l'acido si separa cristallizzato, ed il liquido ritorna incolore. Se si aggiunge una traccia di alcali, l'acido a freddo si ridiscioglie e si ottiene un liquido di colore azzurro cupo, intensissimo.

« Evidentemente l'ione $C_6Cl_2\left(C(COOC_2H_5)_2\right)_2O_2$ è molto intensamente colorato in azzurro. Infatti le soluzioni dell'etere nell'acqua bollente le quali contengono detto jone in quantità molto piccola, sono debolmente colorate in azzurro; non si può ammettere che tale colorazione derivi da presenza di traccie di alcali o da qualche sorta di salificazione della sostanza, giacchè tali soluzioni per raffreddamento si scolorano. Mi pare che senza accettare l'ipotesi della colorazione degli joni, sarebbe impossibile spiegare questo comportamento così caratteristico dell'etere diclorochinondimalonico.

« In conclusione, le esperienze descritte in questa Nota mi conducono a ritenere che in certi casi l'ipotesi geniale della colorazione degli joni è molto utile a spiegare i fatti osservati. Per questi casi, che sono per ora assai pochi, l'ipotesi di Ostwald si presta veramente bene; per essi acquista un certo grado di probabilità ».

Fisica. — *Sulla conducibilità elettrica dei sali in varî solventi* [1]. Nota del prof. Carlo Cattaneo, presentata dal Corrispondente Naccari.

« Espongo nella presente Nota i risultati sperimentali ottenuti nel corrente anno continuando le mie ricerche sulla conducibilità elettrica dei sali in varî solventi, ricerche interrotte lo scorso anno per cause indipendenti dalla mia volontà.

« Nel 1893 avevo pubblicato due Note [2] su tale argomento in seguito allo studio di soluzioni in acqua, alcool, etere e glicerina di varî fra i sali seguenti: « joduro potassico, joduro di cadmio, bromuro potassico, bromuro di cadmio, cloruro di sodio, cloruro di ammonio, cloruro bario, cloruro di

(1) Lavoro eseguito nel Gabinetto di Fisica del R. Istituto Tecnico di Torino.

(2) Cattaneo, Atti. R. Accad. Scienze. Torino, vol. XXVIII, aprile 1893; Rend. R. Accad. Lincei. Roma, vol. II, 1° sem., fasc. 7°, 1893.

zinco. cloruro mercurico, cloruro di alluminio, cloruro ferroso e cloruro ferrico » e mi riserbavo appunto in altre Note di aggiungere nuovi dati sperimentali per avvalorare meglio i confronti, e per poter generalizzare con maggior fondamento di causa i risultati e le discussioni finali. I sali studiati presentemente sono il joduro mercurico nell'alcool etilico, nell'alcool amilico, nell'alcool metilico, nell'acetone, nell'etere, nell'acido acetico; il cloruro di platino ed il cloruro di oro nell'acqua, nell'alcool e nell'etere; i ioduri di ammonio, bario, zinco, i bromuri di sodio, di ammonio, di bario, di zinco, di mercurio, i cloruri di litio, e di rame nei solventi acqua od alcool.

« Per tutto quanto è relativo alle misure di resistenza (metodo di Kohlrausch mediante l'uso del ponte di Wheatstone con correnti alternate e telefono), alla preparazione delle resistenze campioni, dei tubi di resistenza e loro capacità di resistenza, alla preparazione delle soluzioni titolate ed ai calcoli delle misure eseguite rimando il lettore alle mie due Note sopracitate. Aggiungerò qui soltanto i seguenti particolari:

« 1.° Tanto i solventi quanto i sali erano chimicamente puri; dei solventi ho determinato anche alcuni dei coefficienti fisici principali (in ispecie la densità) per verificare se realmente il solvente corrispondeva allo stato di chimica purezza, come si esige per ricerche tanto delicate nelle quali una piccola impurità del prodotto basta per portare divergenze fortissime dai valori reali nei risultati finali.

« 2.° Ho sempre potuto adoperare in tutte le misure un unico tubo di resistenza; esso era costituito da un recipiente cilindrico di vetro della altezza di 12 cent. e del diametro di 5,5 cent.; il coperchio di ebanite, il quale veniva poi tutto all'intorno paraffinato per chiudere ermeticamente la soluzione da studiarsi, sosteneva mediante verghette di platino due placche di platino platinato della superficie ciascuna di circa 8 cent. quad., disposte parallelamente alla distanza di circa 2 millim. Un tale tubo di resistenza serve bene anche per soluzioni che presentino una conducibilità elettrica tanto piccola da essere rappresentata ad esempio da frazioni come 0,000000000001; la sua capacità di resistenza variò durante tutto il corso delle misure da 0,00000175 a 0,00000170 e veniva controllata di frequente mediante soluzioni titolate di cloruro sodico e di cloruro ferrico, delle quali conoscevo con esattezza per altre vie la conducibilità elettrica a 18° ed il coefficiente di temperatura.

« 3.° Come resistenze campioni adoperai le stesse da me preparate espressamente nel 92 e nel 93 nel Laboratorio di fisica dell'Università di Siena, e delle quali mi ero già servito per le misure antecedenti.

« 4.° Determinai accuratamente anche la conducibilità elettrica dei diversi solventi a varie temperature per averne il coefficiente di temperatura e la conducibilità a 18° e per poter quindi calcolare la vera conducibilità del sale.

« 5° Grandi riguardi, cure speciali e grande perdita di tempo mi costarono la preparazione delle soluzioni titolate, specialmente in certi casi in cui il sale si mostrava deliquescente. Avevo a disposizione una buona bilancia Deleuil sensibile al decimo di milligrammo; talvolta però invece di pesare direttamente la piccola quantità di sale occorrente per effettuare la soluzione di data ricchezza molecolare, trovai più conveniente e meno soggetto ad errori di prepararmi una prima soluzione concentrata con porzioni della quale, mediante aggiunta di solvente, venivo poi ottenendo le soluzioni di mano in mano più diluite; ciò mi fu reso assolutamente necessario col cloruro di oro e col cloruro di platino che dovetti rendere anidri espressamente e pesare in tubi chiusi.

« Fu poi oggetto di cure speciali lo studio delle soluzioni di joduro mercurico nell'acetone le quali sembrava che variassero un tal poco di conducibilità col tempo, nel senso di diminuire; dovetti perciò aver cura di studiare le diverse soluzioni appena preparate, e nel più breve termine di tempo possibile, uguale per tutte.

« 6° Il calcolo della conducibilità specifica c delle soluzioni riferita al mercurio a 0° venne fatto in base alle formole:

$$c = \frac{C}{R} \qquad a = \frac{c_{t'} - c_t}{c_t\,(t' - t)}$$

ove C rappresenta la capacità di resistenza del tubo (resistenza che vi presenterebbe il mercurio a 0°), R la resistenza presentata dalla soluzione ad una data temperatura t o t', a il coefficiente di temperatura.

« Nelle tavole seguenti ove si trovano riassunti i risultati delle esperienze ho sempre indicato:

con p il peso del sale su 100 di solvente, con m la ricchezza molecolare della soluzione ossia il rapporto fra il numero di grammi di sale contenuto in un litro di soluzione ed il peso equivalente E del sale stesso,

con c la conducibilità elettrica specifica della soluzione a 18°,

con c' quella del sale a 18° (ossia c diminuito della conducibilità S del solvente puro),

con k la conducibilità elettrica molecolare del sale a 18° calcolata colla formula $K = \frac{c'_{18}}{m}$,

con a il coefficiente di temperatura delle soluzioni,

con h la conducibilità elettrica molecolare del sale a 18° per $m = 0{,}001$ o determinata direttamente o dedotta dalla curva.

« Per quanto riguarda la tavola 2ª osservo che il cofficiente di temperatura delle soluzioni di joduro mercurico in acetone è dato soltanto come un valore medio ed approssimativo stante l'inconveniente che più innanzi citai a proposito di qnesto solvente; nella tavola 6ª i numeri segnati a destra

con (+) sono stati tolti dalla memoria del Kohlrausch [1], quelli segnati con (—) dalla Memoria del Vicentini [2], quelli segnati (·) sono del Völlmer [3], gli altri sono stati tutti ricavati direttamente da me, ed in detta tavola sono anche riassunti i risultati ottenuti nei miei lavori antecedenti sull'argomento; nella tavola 7ª i sali si susseguono in ordine decrescente di conducibilità in soluzione acquosa, affinchè si scorga meglio la relazione colla conducibilità in altri solventi; da ultimo faccio notare che i valori citati del Kohlrausch e del Vicentini si riferiscono a $\frac{c_{18}}{m}$ e non a $\frac{c'_{18}}{m}$ e che per il cloruro di ammonio, cloruro di litio, cloruro di rame e cloruro di zinco nell'alcool i valori di h sono stati ottenuti costruendo la curva delle conducibilità, deducendone le conducibilità corrispondenti ai valori 0,1, 0,05 di m e calcolando i due coefficenti h, h' della equazione

$$k_{18} = hm - h'm^2$$

che dà la conducibilita in funzione del numero delle molecole. Quindi h rapresenta per i detti sali in soluzione alcoolica il limite al quale converge il valore del rapporto fra la conducibilità ed il contenuto molecolare.

Tavola 1ª.

Joduro mercurico HgI_2. $E = \frac{1}{2} HgI_2 = 226{,}4$

p	m_{18}	$c_{18} \cdot 10^9$	$c'_{18} \cdot 10^9$	$K_{18} \cdot 10^8$	a	*Osservazioni*
			Soluzioni in alcool etilico C_2H_6O.			
1,015	0,0359	0,0933	0,0571	0,159	0,023	$S_{18} \cdot 10^9 = 0{,}0362$
0,871	0,0308	0,0885	0,0523	0,170	0,022	
0,600	0,0211	0,0790	0,0428	0,203	0,022	
0,383	0,0135	0,0693	0,0331	0,245	0,022	
0,131	0,0046	0,0538	0,0176	0,381	0,020	
0,070	0,0025	0,0499	0,0137	0,555	0,021	
			Soluzioni in alcool metilico CH_4O.			
2,218	0,0777	0,384	0,210	0,270	0,011	$S_{18} \cdot 10^9 = 0{,}174$
1,824	0,0636	0,353	0,179	0,281	0,013	
1,480	0,0518	0,334	0,160	0,308	0,013	
1,000	0,0351	0,296	0,122	0,347	0,013	
0,500	0,0176	0,271	0,097	0,551	0,012	
0,210	0,0074	0,246	0,072	0,973	0,011	
0,113	0,0044	0,234	0,060	1,363	0,012	
0,050	0,0017	0,217	0,043	2,530	0,012	
			Soluzioni in alcool amilico $C_5H_{12}O$.			
0,249	0,0093	0,390	0,057	0,610	0,043	$S_{18} \cdot 10^9 = 0{,}333$
0,210	0,0079	0,387	0,054	0,690	0,043	
0,125	0,0047	0,379	0,046	0,980	0,043	
0,082	0,0031	0,369	0,036	1,170	0,043	
0,040	0,0015	0,355	0,022	1,480	0,043	

(1) Kohlrausch, Ann. Physik and Chemie. 1885, Baud XXVI.
(2) Vicentini, Memorie R. Accad. Torino, 1884, tomo XXXVI.
(3) Völlmer, Ann. Physik and Chemie. 1894, Band LII, pag. 328.

TAVOLA 2ª.

Joduro mercurico HgI_2. $E = {}^1/_2 HgI_2 = 226,4$

p	m_{18}	$c_{18} . 10^9$	$c'_{18} . 10^9$	$K_{18} . 10^8$	*Osservazioni*
		Soluzioni nell'acetone C_3H_6O.			
1,049	0,0364	0,234	0,219	0,602	
0,369	0,0129	0,171	0,156	1,210	$S_{18} . 10^9 = 0,0147$
0,314	0,0109	0,155	0,140	1,280	
0,257	0,0090	0,139	0,124	1,370	
0,195	0,0068	0,124	0,109	1,600	$a = 0,01$?
0,130	0,0045	0,102	0,0873	1,940	
0,066	0,0023	0,0778	0,0631	2,740	
		Soluzione nell'acido acetico $C_2H_4O_2$.			
0,028	0,00131	0,0141	0,00230	0,176	$S_{18} . 10^9 = 0,0118$; $a = 0,022$
		Soluzione nell'etere solforico $(C_2H_5)_2O$.			
0,221	0,00702	0,0182	0,0182	0,259	S infinitamente piccolo; $a = -0,025$

TAVOLA 3ª.

Cloruro di oro $Au Cl_3$. $E = Au Cl_3 = 302,4$

p	m_{18}	$c_{18} . 10^9$	$c'_{18} . 10^9$	$K_{18} . 10^8$	*Osservazioni*
		Soluzione nell'acqua H_2O.			
0,030	0,001	34,6	34,3	3430	$S_{18} . 10^9 = 0,323$
		Soluzioni nell'alcool etilico C_2H_6O.			
0,185	0,00488	11,3	11,2	229	$S_{18} . 10^9 = 0,0362$
0,069	0,00182	4,63	4,59	252	
0,029	0,00077	2,49	2,45	319	$a = 0,027$
		Soluzioni nell'etere solforico $(C_2H_5)_2O$.			
0,726	0,0171	1,440	1,440	8,42	S_{18} infinitamente piccola
0,330	0,0078	0,532	0,532	6,82	
0,185	0,0044	0,288	0,288	6,56	
0,138	0,0033	0,216	0,216	6,58	$a = -0,017$
0,053	0,0013	0,108	0,108	8,57	

Tavola 4ª.

Cloruro di platino $PtCl_4$. $E = \frac{1}{2} PtCl_4 = 167,9$

p	m_{18}	$c_{18} . 10^9$	$c'_{18} . 10^9$	$K_{18} . 10^8$	*Osservazioni*
		Soluzione nell'acqua H_2O.			
0,017	0,001	15,8	15,5	1550	$S_{18} . 10^9 = 0,323$
		Soluzioni nell'alcool etilico C_2H_6O.			
0,211	0,01003	8,13	8,09	80,6	
0,155	0,00740	6,48	6,44	87,0	$S_{18} . 10^9 = 0,0362$
0,060	0,00279	3,06	3,02	108,0	
0,023	0,00109	1,34	1,30	119,0	
		Soluzioni nell'etere solforico $(C_2H_5)_2O$.			
0,812	0,0345	0,0700	0,0700	0,203	
0,509	0,0217	0,0515	0,0515	0,237	S_{18} infinitamente pic-
0,400	0,0171	0,0447	0,0447	0,261	cola
0,299	0,0128	0,0299	0,0299	0,233	
0,207	0,0089	0,0250	0,0250	0,281	$a = -0,019$
0,070	0,0030	0,0091	0,0091	0,304	

Tavola 5ª.

Valori della conducibilità elettrica molecolare per $m = 0,001$.

Nome dei sali	E		p	$c_{18} . 10^9$	$c'_{18} . 10^9$	$h_{18} . 10^8$
	Soluzioni nell'acqua H_2O.		$S_{18} . 10^9 = 0,323$			
Joduro di ammonio	NH_4I	144,6	0,014	9,27	8,95	895
Joduro di bario	$\frac{1}{2} BaI_2$	194,9	0,019	7,49	7,17	717
Joduro di zinco	$\frac{1}{2} ZnI_2$	159,5	0,016	4,73	4,41	441
Bromuro di sodio	$NaBr$	102,7	0,010	6,20	5,88	588
Bromuro di ammonio . . .	NH_4Br	97,8	0,0098	9,55	9,23	923
Bromuro di bario	$\frac{1}{2} BaBr_2$	148,1	0,015	6,98	6,66	666
Bromuro di zinco	$\frac{1}{2} ZnBr_2$	112,2	0,011	7,73	7,40	740
Bromuro di litio	$LiCl$	42,4	0,0042	8,95	8,63	863
Cloruro di rame	$\frac{1}{2} CuCl_2$	66,9	0,0067	5,93	5,60	560
Cloruro di oro	$AuCl_3$	302,4	0,030	34,6	34,3	3430
Cloruro di platino	$\frac{1}{2} PtCl_4$	167,9	0,017	15,8	15,5	1550
	Soluzioni nell'alcool etilico C_2H_6O.		$S_{18} . 10^9 = 0,0362$			
Joduro di ammonio	NH_4I	144,6	0,0181	3,050	3,01	301
Joduro di zinco	$\frac{1}{2} ZnI_2$	159,5	0,0198	0,322	0,286	28,6
Joduro di bario	$\frac{1}{2} BaI_2$	194,9	0,0243	2,13	2,09	209
Bromuro di sodio.	$NaBr$	102,7	0,0128	3,26	3,22	322
Bromuro di ammonio . . .	NH_4Br	97,8	0,0122	2,88	2,84	284
Bromuro di zinco	$\frac{1}{2} ZnBr_2$	112,2	0,0140	0,216	0,18	18,0
Bromuro di bario	$\frac{1}{2} BaBr_2$	148,1	0,0185	1,39	1,35	135
Bromuro mercurico	$\frac{1}{2} HgBr_2$	179,7	0,0225	0,048	0,012	1,22

Tavola 6ª.

Conducibilità elettrica molecolare dei sali a 18° per m = 0,001 nei diversi solventi.
$h_{18} \cdot 10^8$

Nomi dei Sali	Soluzioni in acqua	Soluzioni in alcool etilico	Soluzioni in glicerina	Soluzioni in etere solforico	*Osservazioni*
Joduro di potassio . .	1200 (+)	410 (·)	4,44		$h_{18} \cdot 10^8$ per il Joduro mercurico e per m = 0,001 nei solventi seguenti:
Joduro di ammonio .	895	301	—		
Joduro di bario . . .	717	209	—		
Joduro di zinco . . .	441	28,6	—		
Joduro di cadmio . .	885	4,7	—	0,0148 per m=0,0037	Alcool etilico 1,000
					Alcool amilico 1,600
Joduro di mercurio . .	—	1,0	—		Alcool metilico 3,000
Bromuro di sodio . .	588	322	—		Acetone 3,280
Bromuro di potassio .	1080 (+)	—	0,85		Etere 0,084 per m = 0,015
Bromuro di ammonio .	923	284	—		Acido acetico 0,176 per m = 0,0013
Bromuro di bario . .	666	135	—		
Bromuro di zinco . .	740	18	—		
Bromuro di cadmio . .	705	14	—		
Cloruro di sodio . . .	1010 (+)	315 (·)	4,7		
Cloruro di potassio . .	1193 (+)	—	—		
Cloruro di ammonio .	1190 (+)	170,2 (—)	5,27		
Cloruro di litio . . .	921 (+)	167,5 (—)	—		
Cloruro di bario . . .	1090 (+)	—	3,24		
Cloruro di zinco . . .	990 (+)	6,4 (—)	2,93		
Cloruro di rame . . .	560	15,0 (—)	—		
Cloruro di mercurio. .	69	5,4	—	0,00026 ?	
Cloruro di alluminio .	1400	295	—		
Cloruro ferroso . . .	575	91	—	0,114 per m=0,0011	
Cloruro ferrico . . .	3400	190	11,5	0,450	
Cloruro di oro . . .	3430	294	—	9,600	
Cloruro di platino . .	1550	119	—	0,310	

Tavola 7ª.

Nomi dei Sali	Soluzioni in acqua	Soluzioni in alcool etilico	Soluzioni in glicerina	Soluzioni in etere solforico	*Annotazioni*
Cloruro di oro	3430	294	—	9,6	
Cloruro ferrico	3400	190	11,5	0,4	
Cloruro di platino	1550	119	—	0,3	
Cloruro di alluminio . . .	1400	295	—	—	
Joduro di potassio	1200	410	4,4	—	
Cloruro di potassio	1193	—	—	—	
Cloruro di ammonio. . . .	1190	170,2	5,3	—	
Cloruro di bario	1090	—	3,2	—	
Bromuro di potassio . . .	1080	—	0,8	—	
Cloruro di sodio	1010	315	4,7	—	
Cloruro di zinco	990	6,4	2,9	—	
Bromuro di ammonio . . .	923	284	—	—	
Cloruro di litio	921	167,5	—	—	
Joduro di ammonio	895	301	—	—	
Joduro di cadmio	885	4,7	—	—	
Bromuro di zinco.	740	18	—	—	
Joduro di bario	717	209	—	—	
Bromuro di cadmio	705	14	—	—	
Bromuro di bario	666	135	—	—	
Bromuro di sodio	588	322	—	—	
Cloruro ferroso	575	91	—	—	
Cloruro di rame	560	15	—	—	
Joduro di zinco	441	28,6	—	—	
Cloruro mercurico	69	5,4	—	0,0003 ?	

« Rimando ad una prossima Nota le discussioni finali e le conclusioni che si possono trarre dai dati numerici raccolti nelle tavole qui sopra riportate ».

CORRISPONDENZA

Ringraziarono per le pubblicazioni ricevute:

La Società Reale di Londra; la Società di scienze naturali di Emden; l'Istituto Teyler di Harlem; l'Istituto Smithsoniano di Washington; l'Osservatorio Lick di California.

Annunciarono l'invio delle proprie pubblicazioni:

La Direzione della Statistica generale di Bucarest; le Università di Lilla e di Cambridge.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA
dall' 8 luglio al 4 agosto 1895.

Bassani F. — Avanzi di Carcharodon auriculatus scoperti nel calcare eocenico di Valle Gallina presso Avesa. Verona, 1895, 8°.

Blanchère (Du Coudray la). — L'aménagement de l'eau et l'installation rurale dans l'Afrique Ancienne. Paris, 1895, 8°.

Bombicci L. — Descrizione degli esemplari di solfo nativo cristallizzato delle solfare di Romagna, raccolti e classificati. Bologna, 1895, 4°.

Cabreira Th. — Analyse geometrica de duas espiraes parabolicas. Lisboa, 1895, 8°.

Id. — Principios de Stereo-chimica. Lisboa, 1894, 8°.

Cope E. D. — Fourth contribution to the Marine Fauna of the Miocene Period of the United States. Philadelphia 1895, 8°.

Id. — The Antiquity of Man in North. America, s. l., 1895, 8°.

Guccia G. B. — Sur une expression du genre des courbes gauches algébriques douées de singularités quelconques. Paris, 1895, 8°.

Id. — Sur une question concernant les points singuliers des courbes gauches algébriques. Paris, 1895, 4°.

Helmholtz H. v. — Handbuch der Physiologischen Optik. Lief. XII. Leipzig, 1895, 8°.

Keeler J. E. — Conditions Affecting the Form of Lines in the Spectrum of Saturn. Chicago, 1895, 8°.

Id. — A Spectroscopic Proof of the Meteoric Constitution of Saturn's Rings. Chicago, 1895, 8°.

Loewy et *Puiseux.* — Sur les photographies de la Lune obtenues au grand equatorial coudé de l'Observatoir de Paris. Paris. 1895, 4°.

Meli R. — Paragone fra gli strati sabbiosi a Ciprina aequalis Bronn del Monte Mario e quelli di Ficarazzi. Roma, 1895, 8°.

Id. — Sopra alcuni resti fossili di mammiferi rinvenuti alla Cava della Catena presso Terracina. Roma, 1895, 8°.

Id. — Sopra due esemplari di neptunea sinistrorsa Desh. (Fusus) pescati sulla costa d'Algeri. Roma, 1895, 8°.

Prestwich J. — On certain phenomena belonging to the Close of the last geological period and on their bearing upon the tradition of the flood. London, 1895, 8°.

Riccò A. — Eclisse di Luna del 14-15 settembre 1894, osservato nel R. Osservatorio di Catania. Roma, 1895, 4°.

Riccò A. — Il Sole. Discorso. Catania, 1895, 8°.

Sacchi E. — Di un caso di gigantismo infantile (pedomacrosamia) con tumore del testicolo. Reggio E., 1895, 8°.

Schiaparelli G. — Sopra alcune nuove apparenze nel pianeta Venere. Milano, 1895, 8°.

Verson E. e *Bisson E.* — Sviluppo postembrionale degli organi sessuali accessori nel maschio del B. Mori, VIII. Padova, 1895, 8°.

Wellner M. — Einleitung zur Geschichte der Wissenschaft. Taus, 1895, 8°.

P. B.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia prima del 18 agosto 1895.

Matematica. — *Sopra un nuovo trascendente in relazione colle funzioni* Γ *e* Z. Memoria del Socio P. Blaserna.

Questo lavoro sarà pubblicato nei volumi delle Memorie.

Fisica. — *Considerazioni sulla conducibilità elettrica dei sali in varî solventi* (1). Nota del prof. Carlo Cattaneo, presentata dal Corrispondente Naccari.

« Nelle mie tre Note antecedenti, relative alla conducibilità elettrica dei sali in varii solventi (2), sono citati i lavori fatti sull'argomento sino al 1893; da questa epoca sino ad ora uscirono alcune altre pubblicazioni come quelle di Gregory, di Wöllmer, di Schlamp, di Wildermann, di Monti e di Carrara (3); il Gregory si occupò di alcune soluzioni di sali di calcio, stronzio e bario; il Wöllmer studiò la conducibilità di alcuni sali nell'alcool etilico e nell'alcool metilico e molte delle sue conclusioni concordano perfettamente con quelle a cui si arriva considerando le tavole numeriche della presente Nota, lo Schlamp studiò la conducibilità elettrica delle soluzioni propiliche, il Wildermann esaminò soluzioni in alcool etilico, il Carrara presentò i risultati ottenuti con un lungo e bellissimo studio sulla conducibilità elettrica del joduro di trietilsolfina in molti solventi, il Monti trattò della relazione fra la conducibilità elettrica e l'attrito interno degli elettroliti.

« Dalla ispezione delle Tavole numeriche riportate nella Nota antece-

(1) Lavoro eseguito nel Gabinetto di Fisica del R. Istituto tecnico di Torino. V. pag. 63.

(2) (Atti Acc. sc. di Torino, aprile 1893. — Rend. R. Acc. Linc., Roma 1893. — Id., 1895).

(3) Gregory, Ann. d. Physik. and Chemie., 51, 1894, pag. 126. — Völlmer, Ann. Physik. and Chemie., 52, 1894. — Schlamp, Zeitschrift für physik. chemie., Band. XIV, pag. 272, 1894. — Wildermann, Idem. Band. XIV (2), pag. 231. — Carrara, Gazzetta chimica italiana, fasc. VI, 1894, pag. 504. — Monti, Atti R. Accad. scienze Torino, XXVIII, 1893.

dente (R. Accad. Lincei, luglio 1895) possiamo intanto ricavare questi risultati:

1° In generale la conducibilità elettrica delle soluzioni saline acquose è maggiore di quella delle soluzioni corrispondenti alcooliche, questa di quella gliceriche, e quest'ultima di quella delle eteree.

2° Per tutte le soluzioni in acqua, alcool etilico, alcool metilico, alcool amilico, glicerina ed acetone, la conducibilità elettrica non cresce proporzionalmente alla concentrazione, ma alquanto più lentamente; per le soluzioni in etere, invece, meno qualche rara eccezione, cresce più rapidamente.

3° La conducibilità molecolare dei sali nell'acqua cresce col crescere della diluizione, nell'alcool cresce per i cloruri; nell'etere in generale diminuisce, nella glicerina cresce per i cloruri, per il ioduro mercurico cresce nei solventi alcool etilico, metilico, amilico ed acetone.

4° In generale i coefficienti di temperatura hanno un valore più grande per le soluzioni acquose che per le alcooliche; per le soluzioni eteree si avvicinano in valore assoluto all'ordine di grandezza dei coefficienti delle acquose, ma sono negativi; per le soluzioni glicoriche poi i detti coefficienti hanno un valore assai elevato.

5° Dalle tavole 6ª e 7ª si scorge poi che il solvente, a parità anche di tutte le altre circostanze, ha una influenza notevole nel modificare la conducibilità elettrica dei sali; però non è dato ancora di scorgere una diretta relazione fra le proprietà specifiche dei diversi solventi e la conducibilità in essi del sale; la tavola 7ª dimostra chiaramente che l'ordine decrescente di conduttività in acqua non è mantenuto per i varii sali negli altri solventi.

6° Dalla tavola 1ª per il Joduro mercurico si rileva, analogamente a quanto trovò il Wöllmer per altri sali, che la conducibilità molecolare è maggiore nelle soluzioni in alcool metilico che in etilico, e che aumenta coll'aumentare della diluizione.

7° In base ai dati registrati nella Nota antecedente sopra citata, ho eseguito anche molti calcoli per riscontrare se valgono per le soluzioni da me studiate le leggi stabilite da Arrhenius, Ostwald e Nernst sul valore limite a cui tende la conducibilità degli elettroliti; per quanto riguarda, ad esempio, la legge fondamentale della diluizione, anch'io ho trovato (come il Völlmer e lo Schlamp) che essa non si verifica in alcuno dei solventi sperimentati. È noto che se si indica con v il numero dei litri in cui è sciolto il peso molecolare del sale, con k la conducibilità molecolare, con K_∞ il limite verso cui tende la conducibilità molecolare col crescere della diluizione, con α il rapporto $\frac{k_v}{K_\infty}$ ossia il grado di dissociazione, si ha come espressione della legge fondamentale della dissociazione elettrolitica la formula:

$$\frac{\alpha^2}{v(1-\alpha)} = H$$

ove H dovrebbe essere una costante.

« Per i valori di K_∞ il calcolo non si potrebbe fare direttamente, basandosi sulle leggi di Kohlrausch, che per l'acqua; bisognerebbe conoscere direttamente anche per gli altri solventi la velocità di trasporto degli joni, velocità che si deduce in base alla conoscenza delle conducibilità molecolari e del numero di trasporto pei sali adoperati nei diversi solventi, ed a questo riguardo le nostre conoscenze sono ben limitate; un contributo importante all'argomento così delicato e difficile l'abbiamo però in uno studio accurato del Campetti pubblicato lo scorso anno [1]. Per altri solventi che non siano acqua bisogna adunque per ora accontentarsi di vie indirette le quali conducono a risultati appena appena approssimativi. Il Völlmer, per rappresentare le K, addottò la formula empirica:

$$K = \frac{a}{1 + bm^{\frac{1}{3}} + cm^{\frac{2}{3}}}$$

ove a, b, c sono tre costanti e dalla quale per $m = 0$ si ha $a = K_\infty$.

« Lo Schlamp si servì della equazione

$$K_\infty = K - bm$$

ove b è una costante.

« Per portare, fra i tanti, un esempio dei valori che si possono ottenere per H, consideriamo le tavole 3ª e 4ª che si riferiscono al cloruro di oro e di platino in alcool etilico ed in etere; il calcolo approssimativo delle K_∞ l'ho eseguito, come il Carrara, scrivendo in base alla

$$\frac{\alpha^2}{v(1-\alpha)} = H$$

(dove H dovrebbe essere una costante) che:

$$\frac{\alpha^2}{v(1-\alpha)} = \frac{\alpha_1^2}{v_1(1-\alpha_1)}$$

« Dai valori di m ottengo quelli di v e v_1; α ed α_1 sono espressi rispettivamente dai rapporti $\frac{k_v}{K_\infty}$, $\frac{k_{v_1}}{K_\infty}$; quindi l'equazione precedente può servire al calcolo di K_∞ ed accoppiando a due a due le esperienze eseguite, includendovi sempre quella che si riferisce alla soluzione più diluita, prendendo infine il valor medio, si può presumere di ottenere un numero che non sia troppo lontano dal vero. Noto K_∞ allora si possono calcolare i valori di α e di H.

« Ecco ora i risultati nella Tavola 8ª.

[1] Campetti. *Nuovo Cimento*, 35, pag. 225, 1894.

Tavola 8ª

Nome del sale	m	k . 10^8	α	H	m	k . 10^8	α	H
	Soluzioni in alcool etilico				Soluzioni in etere solforico			
Cloruro di oro . . .	0,00488	229	0,558	0,00344	0,0171	8,42	0;821	0,0640
	0,00182	252	0,614	0,00177	0,0078	6,82	0,665	0,0103
	0,00077	319	0,778	0,00209	0,0044	6,56	0,640	0,0050
					0,0033	6,58	0,641	0,0038
	K_∞ =	410			0,0013	8,57	0,836	0,0055
					K_∞ =	10,25		
Cloruro di platino . .	0,01003	80,6	0,617	0,0099	0,0345	0,203	0,636	0,038
	0,00740	87,0	0,666	0,0096	0,0217	0,237	0,738	0,045
	0,00279	108,0	0,827	0,0110	0,0171	0,261	0,813	0.061
	0,00109	119,0	0,911	0,0101	1,0128	0,233	0,726	0,024
					0,0089	0,281	0,875	0,054
	K_∞ =	130,6			0,0030	0,304	0,947	0,051
					K_∞ =	0,321		

« Da questa tavola si scorge chiaramente che siamo ben lungi dal poter ritenere la H come una costante per le soluzioni in etere, e per quanto riguarda le soluzioni in alcool etilico, i numeri non sono dei migliori, tanto da autorizzarci a conchiudere che la legge della diluizione si verifica anche in questi casi.

8° Ho ricercato altresì se si verifica il fatto, dato come certo dal Völlmer, che con l'aumentare del peso molecolare del solvente la conducibilità limite diventa più piccola.

« Basta dare uno sguardo alla Tavola 9ª e considerare anche i risultati ottenuti dal Carrara, per convincersi che l'ipotesi del Völlmer non è del tutto giustificata; è bensì vero che detta ipotesi parrebbe verificata se prendiamo in considerazione soltanto i tre solventi acqua, alcool ed etere, ma i numeri non sono punto soddisfacenti se prendiamo altri solventi, come vedesi nella finca del Joduro mercurico.

$h_{18} . 10^8$ Tavola 9ª.

Nome dei solventi	Peso molecolare	Joduro di potassio	Cloruro di sodio	Cloruro di ammonio	Cloruro di zinco	Cloruro ferrico	Cloruro di oro	Cloruro di platino	Joduro mercurico
Glicerina . . .	92	4,4	4,7	5,3	2,9	11,5	—	—	—
Alcool amilico .	88	—	—	—	—	—	—	—	1,6
Etere solforico .	74	—	—	—	—	—	9,6	0,31	0,08
Acido acetico .	60	—	—	—	—	—	—	—	0,17
Acetone . . .	58	—	—	—	—	—	—	—	3,3
Alcool etilico .	46	410	315	170	6,4	190	294	119	1,0
Alcool metilico .	32	—	—	—	—	—	—	—	3,0
Acqua	18	1200	1010	1190	990	3400	3430	1550	—

9° Dai dati della Tavola 6ª risulta poi indirettamente che in generale il solvente ha una influenza sulle velocità relative degli ioni (come già direttamente aveva trovato il Campetti); infatti dai numeri della detta tavola emerge che in generale per due sali della stessa serie (cioè contenenti il medesimo anione) il rapporto delle conducibilità molecolari non è indipendente dal solvente, e ciò (vedi pag. 227 del lavoro del Campetti già citato) porta in questo caso a ritenere che non è indipendente dal solvente anche il rapporto delle velocità degli ioni.

10° Infine ho voluto analizzare se esista qualche relazione fra le conducibilità molecolari ed i coefficienti di attrito interno o la costante dielettrica dei solventi [1].

Tavola 10ª.

Nome dei solventi	Viscosità assoluta in unità C. G. S. a 20°	Coefficiente di attrito a 20°	Costante dielettrica a circa 15°	$h_{18} . 10^8$			
				Joduro mercurico	Cloruro ferrico	Cloruro oro	Cloruro platino
Glicerina	8,304	—	—	—	11,5	—	—
Alcool amilico . .	0,037	264	15	1,6	—	—	—
Acido acetico . . .	0,014	70,1	10	0,18	—	—	—
Alcool etilico . . .	0,012	68,9	26	1,6	190	294	119
Acqua	0,010	56,2	84	—	3400	3430	1550
Alcool metilico . .	0,006	35,2	32	3,0	—	—	—
Acetone	0,003	22,0	—	3,3	—	—	—
Etere solforico . .	0,0025	13,1	4,4	0,08	0,45	9,6	0,31

« Nella tavola 10ª qui sopra riportata ho riassunto appunto i dati per metterli meglio a confronto tra loro. Parrebbe che per certi solventi, al diminuire della viscosità aumentasse la conducibilità molecolare e che l'inverso accadesse per la costante dielettrica, ma in questi dati ed in altri trovati già da altri sperimentatori, trovansi eccezioni tali (come quella dell'etere per la viscosità) che mi sembra molto azzardato il voler riscontrare allo stato attuale degli studi in proposito una correlazione fra questi coefficienti fisici e la conducibilità molecolare; a questa stessa conclusione è giunto anche il Monti nel suo lavoro sopra citato a proposito della conducibilità di alcuni sali alcalini in mescolanza di acqua e glicerina. Del resto potrebbe darsi che la detta correlazione realmente esistesse e che in misure così delicate le più piccole differenze nelle proprietà fisiche dei solventi, le più piccole impurità tanto dei solventi che dei sali, le diverse condizioni in cui si fanno i confronti, le reazioni secondarie che possono talvolta verificarsi fra sale e solvente, fossero già sufficienti a nascondere le relazioni che si cercano ».

[1] Landolt-Börnstein, *Tabellen*, 2ª edizione.

Fisica terrestre. — *L'azione chimica nella magnetizzazione delle roccie vulcaniche.* Nota del dott. G. FOLGHERAITER, presentata dal Socio BLASERNA.

« Dai risultati avuti nello studio dell'orientazione del magnetismo nelle roccie vulcaniche (1), queste si possono classificare in tre diverse categorie:

« Tipo della prima categoria è la lava basaltina, che nella generalità dei casi trovasi magnetizzata nel senso voluto dall'azione induttrice della Terra, ma che presenta talvolta delle anomalie, i punti distinti, la cui origine non è ancora bene determinata. Il magnetismo della lava è permanente.

« Alla seconda categoria appartengono i tufi litoidi, il cui magnetismo è permanente, ed è dovuto unicamente e senza alcuna eccezione (almeno fino ad ora non ne ho trovata alcuna) all'induzione della Terra.

« Alla terza categoria appartengono i peperini, che non hanno magnetismo permanente, o lo hanno assai debole e generalmente mascherato da quello di posizione (2).

« Però qualora i peperini vengano arroventati, acquistano sotto l'azione induttrice della Terra una quantità di magnetismo permanente paragonabile a quello posseduto dai tufi e dalla lava basaltina: tale comportamento singolare del peperino fa nascere spontanea la domanda della causa, che ne determina la forza coercitiva dopo l'arroventamento.

« È fuori di dubbio che anche il peperino, come le altre specie di roccie vulcaniche, contiene una certa quantità di ferro. Dagli studî petrografici fatti da varî autori, ma specialmente dagli *Studi sui minerali del Lazio* del prof. Strüver (3) risulta, che il ferro trovasi nel peperino allo stato di magnetite in cristalli sparsi nella massa o nelle geodi di massi erratici di lava in esso inclusi; talvolta la magnetite trovasi anche un po' titanifera, ed in alcuni casi la quantità di acido titanico è abbastanza ragguardevole da potere formare con quella altri minerali. Trovasi il ferro inoltre in silicati costituenti la roccia, come pirosseno ecc. ed anche in altre specie di minerali.

« Ora si tratta di vedere se il magnetismo permanente acquistato dal peperino sia dovuto all'orientazione del magnetismo nei cristallini di magne-

(1) Vedi questi Rendiconti, vol. IV, 1° sem., 1895, pag. 203.

(2) Questa classificazione non deve andare intesa alla parola; probabilmente per la grande variabilità nella costituzione e struttura delle roccie vulcaniche le tre categorie non avranno limiti ben delineati, ma tra l'una e l'altra vi saranno delle roccie, che hanno dei caratteri promiscui.

(3) Atti della R. Acc. dei Lincei, Memorie Classe Scienze fis., mat., e nat., serie 2ª, vol. III, pag. 205 e serie 3ª, vol. I, pag. 93.

tite e nelle altre sostanze magnetiche contenute, o se per l'arroventamento abbiano luogo delle azioni chimiche, dalle quali risulti nuova sostanza magnetica dotata di forza coercitiva, o se in fine lo si debba attribuire a tutte e due queste cause riunite assieme.

« Tentai di risolvere la questione in questo modo: raccolsi da molte località nei dintorni dei crateri laziali dei campioni di peperino, scelti in modo che non contenessero degli inclusi, ma che presentassero in tutta la massa un aspetto uniforme. Di ciascuno di questi feci due parti: una parte ridotta a forma di parallelepipedo e sospesa verticalmente entro un involucro d'amianto, veniva riscaldata fino al colore ciliegio incipiente (circa 800°), e tenuta a questa temperatura per un'ora e più; poi veniva polverizzata, e dalla polvere si estraevano le sostanze magnetiche contenute col mezzo di una grossa calamita comune. L'altra parte, eguale in peso al parallelepipedo crudo, non veniva arroventata, ma era senz'altro ridotta in polvere, e da essa pure si estraevano le sostanze magnetiche colla medesima calamita.

« Questo metodo è notoriamente imperfetto, e varie sono le cause che possono influire sull'esattezza dei risultati: la quantità di materie estratte dipende dalla forza magnetica della sbarra adoperata, dalla cura e pazienza dello sperimentatore, e finalmente dalla finezza della polvere nel senso, che quanto questa è più fine, tanto minore è la quantità di materie estranee che le piccolissime masse magnetiche devono trascinare seco, e quindi tanto più facile riesce l'estrazione; ed è evidente, che si avrebbe la sicurezza di estrarre tutte le sostanze magnetiche solo quando queste fossero isolate dal resto della pasta costituente la roccia.

« Tuttavia, dopo essermi assicurato che estraendo le sostanze magnetiche da diverse porzioni di una medesima polvere i risultati andavano abbastanza bene d'accordo, adottai questo metodo, che è sufficiente, come si vedrà in seguito, per decidere almeno in parte la questione propostami.

« Nella tabella 1ª sono riuniti i risultati avuti esperimentando su sette campioni di peperino. La 1ª colonna indica il luogo di provenienza; la 2ª dà il peso in grammi del materiale sottoposto ad esame; la 3ª e 4ª colonna danno la quantità (espressa in millesimi del peso del peperino) di sostanze magnetiche estratte rispettivamente dalla porzione arroventata e da quella non arroventata; la 5ª colonna dà il rapporto tra i valori della 3ª e 4ª; la 6ª colonna dà l'intensità magnetica del parallelepipedo arroventato misurata dalla somma delle due deflessioni prodotte, avvicinando successivamente all'intensimetro i suoi due estremi superiore ed inferiore, (come si usa nel metodo delle deflessioni est-ovest).

TABELLA I.

I	II	III	IV	V	VI
Montecucco	gr. 46,39	13,6	13,2	1,03	0° 26′
Cave di Marino A	44,62	11,0	11,0	1,00	18′
Id. B	26,95	9,3	10,0	0,93	8′
Monte Calabrone	42,26	11,8	11,6	1,02	13′
Fontana di Caiano	45,85	6,6	6,8	0,97	10′
Grande ponte d'Ariccia . . .	39,34	7,6	7,6	1,00	12′
XIII miglio Via Appia . . .	44,26	8,1	8,4	0,96	13′

« Si vede, che il rapporto tra le quantità di sostanze magnetiche estratte dalla porzione arroventata e da quella non arroventata dei singoli campioni, è assai poco diverso dall'unità: ora è un po' maggiore, ora un po' minore. E da un'analisi microscopica poi di tali sostanze, gentilmente fattami dall'ing. Mattirolo, risulta, che esse sono costituite per la massima parte da magnetite. Si dovrebbe perciò a prima vista concludere, che durante e per l'arroventamento non vi sono trasformazioni chimiche, che diano in quantità sensibile nuove sostanze magnetiche, e che la calamitazione del peperino dipende solo dall'orientazione del magnetismo nei singoli cristalli di magnetite.

« Ma tale conclusione avrebbe valore solo quando venissero dalla calamita estratte tutte le sostanze magnetiche, oppure parti proporzionali alla quantità totale: faccio notare, intanto, che in generale per l'arroventamento hanno luogo delle azioni chimiche; anzi il cambiamento di colore del peperino [1] indica con tutta probabilità, che dei sali ferrosi si sono trasformati in ferrici: ma non si hanno ancora prove sufficienti se si producano o no nuove sostanze magnetiche.

« Passo ora ad esporre i risultati che ho ottenuto nell'esame di alcuni campioni di tufi litoidi, fatto allo scopo di determinare la causa che produce in essi l'aumento d'intensità in seguito all'arroventamento [2]. Il processo seguito è identico a quello descritto antecedentemente per i peperini: nella seguente tabella, la disposizione e il significato delle varie colonne corrispondono a quelli della tabella 1ª; si ha la sola differenza, che la 6ª colonna è doppia; nella VI_a e VI_b sono notate le intensità magnetiche dei varî pezzi arroventati rispettivamente prima e dopo l'arroventamento.

[1] Vedi questi Rendiconti vol. IV, 1° sem., 1895, pag. 210.
[2] Idem, pag. 208.

TABELLA II.

I	II	III	IV	V	VI$_a$	VI$_b$
Stazione Trastevere .	gr. 44,72	0,7 °/₀₀	0,7 °/₀₀	1,00	0° 10′	0° 34′
III Kilom. Ardeatina .	33,50	1,0	1,0	1,00	21′	59′
III " Nomentana	42,64	1,4	1,6	0,87	23′	47′
Sedia del diavolo . .	42,21	1,4	1,4	1,00	12′	51′
Pietra lata	43,79	1,4	1,4	1,00	19′	53′
Ponte Buttero . . .	38,85	0,5	0,5	1,00	11′	49′

« Anche da questa tabella risulta, che la quantità di sostanze magnetiche estratte dalle porzioni arroventate non è maggiore di quella estratta dalle corrispondenti porzioni non arroventate; e dall'esame microscopico si trovò che come nei peperini, così anche in tutti i tufi esaminati le particelle attratte dalla calamita sono in massima parte magnetite. L'intensità magnetica per l'arroventamento è sempre cresciuta, ed in alcuni casi anche notevolmente. Ma per la stessa ragione, che è stata esposta più sopra per il peperino, non si può neppure in questo caso decidere, se l'arroventamento abbia o no determinato la formazione di nuova sostanza magnetica.

« Nel confronto delle due riportate tabelle, fa meraviglia la grande differenza tra le quantità di sostanze magnetiche estratte dai peperini e dai tufi: mentre nei primi si trova un massimo di circa 14 °/₀₀ di sostanze magnetiche, nei tufi, che in generale sono molto più fortemente magnetizzati, non se ne riscontra al massimo che 1, 6 °/₀₀, cioè circa la nona parte.

« Questo confronto mi richiamò alla mente un altro fatto non ancora bene chiaro, la magnetizzazione delle argille colla cottura. L'argilla cruda [1] non dà alcun segno di magnetismo nè permanente nè di posizione, e ridotta in polvere non lascia traccia di sostanze magnetiche sopra una calamita anche molto forte; l'argilla cotta invece è dotata di magnetismo permanente, paragonabile talvolta a quello posseduto dai tufi, ma anche questa ridotta in polvere non dà traccia di sostanze magnetiche. Sicchè ci troviamo ora in presenza di tre sostanze diverse, che arroventate hanno magnetismo permanente abbastanza forte, e allo stato naturale invece si comportano assai diver-

[1] Qui si deve intendere l'argilla allo stato puro, come trovasi negli strati terziarî della Valle dell'Inferno e di Monte Mario; sono escluse perciò tutte le argille quaternarie tanto sviluppate nei dintorni di Roma, principalmente nel thalweg del Tevere, che contengono quasi sempre frammischiati dei cristallini di magnetite. Molto meno si deve comprendere con tal nome quella terra usata per la fabbricazione dei mattoni a Rocca Priora, Genzano e Velletri, che è roccia vulcanica decomposta, chiamata impropriamente argilla.

samente: il tufo che è dotato di magnetismo permanente con piccola quantità di cristallini di magnetite; il peperino dotato di magnetismo di posizione con grande quantità di cristallini di magnetite; l'argilla che non ha nè magnetismo permanente, nè di posizione, nè cristallini di magnetite.

« Conseguenza naturale di questo confronto si è, che la presenza dei cristallini di magnetite non appare necessaria per la magnetizzazione, e se questa è dovuta in parte alla loro presenza, si deve attribuire certamente anche ad altre sostanze ferruginose, che trovansi nella massa, e che con calamite comuni anche molto forti non si possono estrarre nè prima nè dopo l'arroventamento.

« Il problema è ora ridotto ad esaminare se tali sostanze ferruginose sono magnetiche, o se hanno luogo delle azioni chimiche durante l'arroventamento, che le trasformano in sostanze magnetiche. La soluzione del problema è data dal risultato delle seguenti due serie di esperimenti.

« 1. Ho preparato una serie di piccoli cilindri di egual peso e lunghezza, formati d'una stessa qualità d'argilla presa alla Valle dell'Inferno dietro il Vaticano: in varî di questi mescolai una certa quantità di magnetite pura con grande cura, perchè questa venisse distribuita uniformemente per tutta la massa. La quantità di magnetite nei varî cilindri varia da 1,5 ‰ fino a 15 ‰. Dopo avere determinato l'azione che essi esercitavano sull'ago del mio solito intensimetro, li arroventai, procurando che la cottura fosse uguale in tutti; e di ciò mi assicurai aggruppandoli a quattro a quattro e mettendo in ciascun gruppo sempre un cilindretto senza magnetite, affinchè confrontando l'intensità magnetica di questi, avessi un termine di paragone sul grado di cottura degli altri.

« Nella tabella III sono raccolti i risultati avuti: nella prima colonna è notata la quantità di magnetite mescolata in ciascun cilindretto; nella seconda colonna l'intensità magnetica prima dell'arroventamento, e quì faccio notare che i varî cilindretti possedevano unicamente magnetismo di posizione; nella terza colonna è notata l'intensità del magnetismo permanente dopo l'arroventamento.

TABELLA III.

I	II	III
0,0 ‰	0° 0',0	0° 7',0
1,5	0',2	8',0
3,0	0',3	8',3
5,0	0',4	9',8
7,5	0',5	10',6
10,0	0',7	11',7
15,0	1',0	14',8

« Questa tabella mostra che per le sostanze ferruginose contenute, non estraibili con un magnete, e che non danno alcun indizio di magnetismo, l'argilla diventa calamita permanente, se viene arroventata, ed il suo magnetismo è paragonabile in intensità a quello prodotto dalla presenza della magnetite al 15 ‰:

che il magnetismo di posizione dovuto alla presenza nell'argilla cruda della magnetite cresce press' a poco proporzionalmente alla quantità di questa;

che il magnetismo permanente dovuto alla presenza nell'argilla arroventata dei cristallini di magnetite, cresce press' a poco proporzionalmente alla loro quantità (almeno nei limiti nei quali mi sono ristretto).

« 2. La seconda serie di esperienze ha lo scopo di determinare l'intensità magnetica del tufo e peperino privati delle loro sostanze magnetiche. Erano a mia disposizione le polveri dei pezzi arroventati e non arroventati dei varî campioni più sopra studiati, e con queste, impastate con un po' di silicato di potassa ed acqua, rifeci i pezzi a forma cilindrica: così per ogni campione ottenni due cilindretti, che chiamerò A e B a seconda che corrispondono alla porzione arroventata o non arroventata.

« Dopochè i varî cilindretti si erano asciugati, e presentavano una certa consistenza, determinai la loro intensità magnetica, quindi li arroventai al solito modo, sospesi verticalmente e rideterminai l'intensità magnetica.

« I risultati avuti sono contenuti nella tabella IV in cui la 1ª colonna dà il luogo di provenienza del materiale adoperato, la II_A e II_B danno l'intensità magnetica dei cilindretti A e B; la III_A e III_B danno le corrispondenti intensità magnetiche dei cilindretti, dopochè essi furono arroventati. Devo avvertire che tutti i valori delle colonne II_A e II_B rappresentano magnetismo di posizione, e che quelli contenuti nelle colonne III_A e III_B rappresentano magnetismo permanente, senza eccezione alcuna.

Tabella IV.

I	II_A	II_B	III_A	III_B
Peperino.				
Cava di Marino B	0° 0′,3	0° 0′,0	0° 3′,2	0° 2′,8
Monte Calabrone	0′,4	0′,0	6′,8	6′,6
Fontana di Caiano	0′,3	0′,0	3′,6	3′,2
XIII miglio Via Appia	0′,4	0′,0	6′,0	7′,8
Tufo.				
III Kilom. Ardeatina	0° 2′,3	0° 2′,4	0° 32′,8	0° 35′,6
III Kilom. Nomentana	2′,3	2′,3	36′,0	34′,8
Pietra lata	2′,4	2′,5	47′,0	44′,8
Ponte Buttero	2′,2	2′,3	33′,0	35′,7

« Risultati.

« 1. Tutti i cilindretti B di peperino non presentano segni di magnetismo nè permanente nè di posizione; invece i cilindretti A di peperino sono dotati di debole magnetismo di posizione.

« Questa differenza caratteristica di comportamento tra il peperino crudo e quello cotto, quando da ambidue, ben s'intende, siano stati estratti i cristallini di magnetite, è decisiva. Essa mostra, che i sali di ferro contenuti nel peperino e non estratti colla calamita non sono sostanze magnetiche, ma alcuni di essi, se non tutti, lo diventano coll'arroventamento. Se così non fosse, i cilindretti A e B dovrebbero comportarsi in modo eguale: o tutti dovrebbero essere dotati di magnetismo di posizione, se contenessero per natura sostanze magnetiche; o nessuno dei due dovrebbe dare indizio di magnetismo, se i sali di ferro non fossero, nè diventassero magnetici coll'arroventamento.

« 2. Se si richiamano alla mente i risultati raccolti nella tabella I, si trova che queste nuove sostanze magnetiche non vengono attratte da una calamita comune. Ciò dipende probabilmente, perchè esse si trovano allo stato di particelle estremamente divise sparse per tutta la massa solida della roccia e non possono riunirsi a costituire delle particelle sensibili, e perchè i granelli di polvere nei quali esse sono racchiuse, per quanto piccoli essi siano, rappresentano un ostacolo troppo grande per essere vinto dall'attrazione magnetica; ma se esse venissero isolate, certo verrebbero estratte come i cristallini di magnetite.

« Se si confronta poi l'intensità magnetica dei campioni di peperino naturale arroventato (vedi tabella I, colonna VI) con quella dei corrispondenti cilindretti arroventati (tabella IV, colonne III_A e III_B), si scorge che il magnetismo permanente del peperino, quando venga arroventato, è dovuto in gran parte all'orientazione del magnetismo nei cristallini di magnetite, ma pare che non si possa dubitare, che in parte non certo trascurabile è dovuto anche a nuova sostanza magnetica ottenuta dalla trasformazione di sali di ferro non magnetici.

« L'argilla si comporta perfettamente come il peperino privato della magnetite. Se si polverizza l'argilla cotta, e si fa con essa un cilindretto, questo è dotato di magnetismo di posizione. Perciò anche nell'argilla durante l'arroventamento, e pare che non si possa dubitarne, intervengono azioni chimiche le quali trasformano sali di ferro non magnetici, in magnetici.

« 3. Tutti i cilindretti formati da tufo, privato delle sostanze magnetiche estraibili con una calamita comune anche forte, sono dotati di magnetismo di posizione abbastanza forte, sia stato il tufo antecedentemente arroventato o no. Manca quì perciò il mezzo diretto per decidere se per l'arroventamento si abbiano nuove sostanze magnetiche: abbiamo solo un indizio che probabilmente trasformazioni non sono avvenute, nel fatto che il magnetismo di posizione non è più forte nei cilindretti A, che in quelli B,

mentre che, come mostra la tabella III, esso cresce colla quantità di sostanze magnetiche contenute. Quindi la calamitazione così forte dei cilindretti arroventati è dovuta all'orientazione del magnetismo nelle sostanze magnetiche di già esistenti nel tufo naturale, e che colla calamita non si possono estrarre, perchè forse si trovano allo stato di particelle estremamente divise come nel peperino ed argilla cotti. La genesi di queste sostanze magnetiche sarebbe coordinata all'origine vulcanica del tufo, e costituirebbe una conseguenza naturale dell'arroventamento subìto entro il cratere prima dell'eruzione vulcanica.

« Se si confronta poi l'intensità magnetica dei campioni di tufo arroventato (tabella II, colonna VI_b) con quella dei corrispondenti cilindretti arroventati (tabella IV, colonne III_A, III_B), si scorge che il magnetismo del tufo è dovuto in gran parte alle sostanze magnetiche estremamente divise e non estraibili colla calamita, ed in piccola parte solo ai cristallini di magnetite.

« 4. Esiste una differenza tra tufo e peperino nella natura delle sostanze ferruginose contenute: nel peperino parte di esse, se non tutte, sembra che si trasformino in sostanze magnetiche coll'arroventamento; nel tufo tale trasformazione probabilmente ha avuto luogo di già quando le ceneri e le scorie, che l'hanno formato, si trovavano ad alta temperatura entro il vulcano ».

Chimica. — *Sulla costituzione degl'isonitrosoacetoni* (1). Nota di G. Oddo, presentata dal Socio Paternò.

« M. Fileti e G. Ponzio in due importanti lavori successivi (2) hanno dimostrato che per l'azione del nitrito di amile e acido cloridrico o etilato sodico sui chetoni della formola:

$$CH_3 \;.\; CO \;.\; CH_2R$$

non si ottiene l'isonitrosocomposto $CH\,(NOH)\,.\,CO\,.\,CH_2R$ corrispondente ad una chetoaldeide, come avevano asserito Claisen e Manasse (3), bensì l'isonitrosoacetone di un α dichetone.

Alla stessa conclusione sono arrivati per altra via Gabriel e Kalischer (4). Questi nell'ultimo fascicolo dei Berichte (5) ha dimostrato che l'isonitrosocomposto ottenuto con quel metodo da Claisen e Manasse dal metilpropilacetone (p. f. 48-51°) è strutturisticamente identico con quello che

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto chimico dell'Università di Palermo.
(2) Gazz. ch. it. XXIV (1894) p. 290 e XXV (1895) p. 233
(3) Berichte (1889) XXII, 526.
(4) Berichte (1894) XVII, 1040.
(5) Berichte (1895).

V. Meyer e Züblin (1) prepararono con etere etilacetacetico e acido nitroso (p. f. 53-55°) della formola:

$$CH_3 . CH_2 . C(NOH) . CO . CH_3 .$$

Tutti e due difatti forniscono l'acido dimetilpirazindicarbonico.

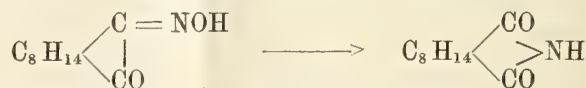
« Da parecchio tempo io mi occupo dello studio dell'isonitrosocanfora. Essa è stata ottenuta da Claisen e Manasse per l'azione del nitrito di amile e del sodio sulla canfora disciolta in etere assoluto (2), e da me (3) per l'azione del nitrito sodico sull'acido canfocarbonico.

« Questi due preparati in alcune reazioni hanno comportamento identico, in altre comportamento del tutto diverso.

« Difatti tutti e due, per l'azione ulteriore dell'acido nitroso, danno il chinone della canfora:

$$C_8H_{14}\left\langle \begin{matrix} C=NOH \\ | \\ CO \end{matrix} \right. \longrightarrow C_8H_{14}\left\langle \begin{matrix} CO \\ | \\ CO \end{matrix} \right.$$

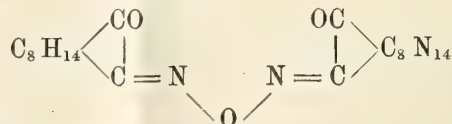
« Per l'azione dell'acido solforico danno canferimide:

$$C_8H_{14}\left\langle \begin{matrix} C=NOH \\ | \\ CO \end{matrix} \right. \longrightarrow C_8H_{14}\left\langle \begin{matrix} CO \\ \\ CO \end{matrix} \right\rangle NH$$

« Con ioduro di etile e il sale di argento o di sodio forniscono il medesimo derivato etilico, p. f. 72°, che cristallizza con $\frac{1}{2}$ mol. di H_2O ed è molto instabile a temperatura elevata.

« Con cloruro di benzoile, usando il metodo di Baumann, danno il medesimo benzoilderivato.

« Hanno comportamento diverso invece rispetto al cloruro di acetile.

« L'isonitrosocanfora dall'acido canfocarbonico fornisce, sia per l'azione diretta di un eccesso di questo reagente che in soluzione in etere assoluto, con la quantità calcolata, l'anidride:

$$C_8H_{14}\left\langle \begin{matrix} CO \\ | \\ C=N \end{matrix} \right. \quad \begin{matrix} OC \\ | \\ N=C \end{matrix} \left\rangle C_8N_{14} \right. \quad (N-O-N)$$

che fonde a 172°, della quale si preparano facilmente la monossima e il monoidrazone.

« Quella preparata col metodo di Claisen per azione diretta del cloruro di acetile fornisce una sostanza che fonde a 222°.

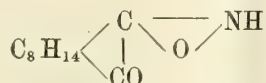
(1) Berichte, XI, 323.

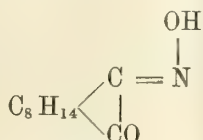
(2) Berichte, XXII, 530 e Ann. d. Ch. 274, 71.

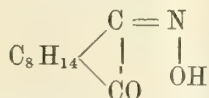
(3) Gazz. ch. ital. XXIII (1893).

« Per l'azione di quantità calcolata di questo reagente in soluzione in etere assoluto si trasforma in un isomero. Esso ha un punto di fusione che differisce soltanto di due gradi da quello dell'isonitrosocanfora (151° invece di 153°); si scioglie negli alcali e nei carbonati alcalini senza colorare la soluzione in giallo, i suoi derivati metilico ed etilico sono liquidi stabilissimi (p. e. 270° per il primo e 278° per il secondo); reagisce col cloruro di benzoile. Con acido nitroso in soluzione acetica non fornisce, come avviene invece per le isonitrosocanfore, il chinone della canfora.

« Molto probabilmente a questo corpo spetta la costituzione:

$$C_8H_{14}\left\langle \begin{array}{l} C \diagdown\!\!-\!\!-\!\!-\!\!\diagup NH \\ | \quad \diagdown O \diagup \\ CO \end{array} \right.$$

« Questa diversità di comportamento tra le due isonitrosocanfore preparate coi due metodi, si possono spiegare ammettendo che esse siano stereoisomere: che cioè una sia l'antiisonitrosocanfora (Oddo):

$$\begin{array}{l} \qquad\quad OH \\ \qquad\quad\; | \\ C_8H_{14}\left\langle \begin{array}{l} C = N \\ | \\ CO \end{array} \right. \end{array}$$

e l'altra la sinisonitrosocanfora (Claisen):

$$C_8H_{14}\left\langle \begin{array}{l} C = N \\ | \qquad | \\ CO \quad OH \end{array} \right.$$

« Questa ipotesi probabilmente si potrà estendere anche agli altri isonitrosoacetoni perchè spiegherebbe le piccole differenze nel punto di fusione che si riscontrano in questi prodotti preparati coi due metodi conosciuti e che trassero Claisen in errore. Essa però è alquanto prematura, ed io ho voluto annunziarla a cagione dei varî lavori che si sono pubblicati sulla costituzione degl'isonitrosoacetoni, per pigliar data e lavorare liberamente questo campo di ricerche.

« La parte sperimentale, che viene eseguita in collaborazione con lo studente Leonardi, sarà pubblicata nella Gazzetta chimica ».

Petrografia. — *Sulla lherzolite di Balmuccia in Val Sesia.* Nota di Ettore Artini e Gilberto Melzi, presentata dal Socio Struever.

« Nelle Alpi piemontesi l'esistenza di peridotiti è nota da tempo; le ricerche del Daubrée [1], del Baretti, e specialmente gli studî petrografici

[1] *Expériences synthétiques relatives aux météorites.* C. R. de l'Acad. d. Sc. LXXII, 200, 369, 660.

del Cossa ([1]) e dello Strüver ([2]), hanno fatto conoscere le lherzoliti del Monte Arpon presso Rubbiana, allo sbocco della Val di Susa; del Monte Basso, presso Germagnano; dei Monti di S. Vittore, tra Corio e Lanzo; di Locana, nella valle dell'Orco; dei Monti Rossi di Baldissero, all'imbocco di Val Chiusella.

« Recentemente l'ing. S. Traverso, nel suo accurato rilievo della regione Ossolana ([3]), ha descritto parecchie peridotiti da lui trovate nelle Valli Vigezzo e Cannobina (M. Gridone, Finero, Orasso, e a N. di Olgia) ed altre che, in meno estesi affioramenti, si osservano nell'alto bacino del S. Bernardino, sotto il Monte Zeda, a Bognanco e a Case Incuso prosso Premosello.

« Un nuovo e vasto affioramento di lherzolite abbiamo potuto osservare nella Val Sesia, regione nella quale da parecchio tempo andiamo facendo ricerche, allo scopo di compierne il rilievo geologico, in base allo studio microscopico delle singole forme litologiche. Trovasi la roccia in questione nella Val Sesia, sopra Varallo, tra i due paesi di Isola e Balmuccia, e precisamente nella località detta *Giavina Rossa.* La strada postale segue l'affioramento per circa un chilometro; il letto della Sesia, profondamente incassato, è inciso nella roccia peridotica, che appare anche nel fianco opposto della valle. La delimitazione dell'importante massa rocciosa, e i suoi rapporti con le rocce circostanti ci riserbiamo di esporre quando anche di queste ultime avremo compiuto lo studio microscopico; nella presente Nota ci limitiamo a farne conoscere il ritrovamento, indicandone succintamente i caratteri petrografici.

« La roccia è molto tenace, generalmente fresca, a grana media o grossa; dotata di lucentezza tra la vitrea e la grassa, di colore grigio-verdognolo.

« Oltre alla forma tipica, due altre *facies* presenta essa eccezionalmente: l'una è rappresentata da certe vene bruno-rossastre, costituite quasi esclusivamente da un impasto di pirosseni in grossi elementi, che non di rado superano la lunghezza di un centimetro, e di granuli neri di spinello, sovente della grossezza di una nocciuola; l'olivina vi è affatto accessoria. L'altro tipo anormale si ha dove la roccia, composta soltanto di olivina, mista a pochi e minuti granuli di picotite, appare colorata in verde-gialliccio chiaro; è sgretolabile e straordinariamente laminata, in guisa da assumere un aspetto alterato, benchè al microscopio l'olivina si riveli freschissima.

« Dove la roccia è stata lungamente esposta all'azione degli agenti at-

([1]) Atti d. R. Acc. d. Sc. di Torino, IX, p. 545; e *Ricerche chimiche e microscopiche su rocce e miner. d'Italia.*

([2]) *Sulla peridotite di Baldissero in Piemonte.* Atti della R. Acc. d. Sc. di Torino, IX, p. 763.

([3]) *Cenni preliminari sulla serie di rocce antiche in Val d'Ossola,* 1892; e *Geologia dell'Ossola,* 1895.

mosferici, è coperta da una patina ocracea, affatto superficiale, che le impartisce una tinta rossastra. Questa colorazione caratteristica, resa ancor più evidente dalla quasi completa mancanza di vegetazione, serve a distinguere nettamente, anche a distanza, la massa lherzolitica dalle rocce circostanti; e ad essa, molto probabilmente, è dovuto il nome locale di *Giavina Rossa.*

« I minerali che prendono parte alla costituzione della roccia sono: olivina; pirosseno monoclino; pirosseno trimetrico; anfibolo bruno; spinello.

« L'*olivina*, in sezione sottile, si mostra affatto incolora; è per lo più in plaghe abbastanza larghe, a contorni irregolari o arrotondati, senza traccia di forme cristalline. La sfaldatura secondo }100{ si mostra qua e là in taluni granuli, con tracce poco numerose, ma discretamente nette. Le inclusioni in generale vi sono poco abbondanti; le più diffuse sono minute inclusioni fluide, che si trovano fittamente riunite a formare serie sinuose irregolari, o anche disposte regolarmente, e allora secondo tre sistemi di piani, ognuno dei quali parallelo ad un pinacoide. Altre inclusioni vi si notano pure più raramente, alquanto più grosse, di forma irregolare, che sembrano essere di natura vetrosa, ma già completamente devitrificate. Nonostante le numerose screpolature, dovute ai fenomeni meccanici dei quali sarà tenuta parola più tardi, l'olivina si mostra quasi sempre freschissima, e solo nelle parti periferiche di qualche campione si rivela un principio di alterazione in serpentino.

« Già fu detto della irregolare distribuzione di questo minerale, come, del resto, degli altri componenti della roccia; così che questa da un tipo di scisto olivinico, bruscamente, e talora nei limiti di una sola sezione sottile, si vede passare ad una vera roccia pirossenitica, che rammenta la Websterite di Fobello (« *in Lombardia* » ?!) descritta da Harker [1].

« Dopo l'olivina, il componente più abbondante e caratteristico è certamente il *pirosseno monoclino*; una cosa però ci sembra notevole e tale da essere subito fatta rilevare: non si tratta che raramente, e quasi in via di eccezione, di un pirosseno che possa meritare il nome di diopside cromico. Questo, col suo colore verde vivace, si nota solo qua e là, in minuti e rari granelli, nei campioni più ricchi di olivina. Nella roccia normale e negli esemplari a facies pirossenitica, si tratta invece ordinariamente di un minerale con abito piuttosto di diallagio, dal colore bruniccio, o gialliccio, senza pleocroismo distinto; in sezione sottile è però affatto incoloro. Come l'olivina, esso si presenta generalmente in grossi granuli irregolari, ma se ne distingue subito, anche a luce naturale, per la frequenza e nettezza delle tracce di sfaldatura; predominano generalmente i due sistemi paralleli alle due coppie di facce del prisma }110{, ma a questi si associano, quasi costantemente, le tracce di piani di separazione secondo }100{, meno fitte, ma più regolari e più nette; meno frequente, ma nettissimo, è un altro sistema di

[1] *On various crystalline Rocks.* Geol. Mag. (3) VIII, p. 170.

piani di separazione, parallelo a }001{. Questo si riconosce bene nelle sezioni approssimativamente parallele alla }010{, nelle quali si nota anche la caratteristica fortissima inclinazione delle direzioni di estinzione sullo spigolo [001]. Tale è la perfezione di questo fenonemo di separabilità secondo i due pinacoidi, che dagli individui di maggiore sviluppo si possono ricavare con un po' di cura, mediante una punta d'acciaio, solidi di pseudo-sfaldatura }100{ }001{. In uno di questi abbiamo potuto misurare al goniometro l'angolo (circa 75°) che formavano tra loro i due piani; del resto questa orientazione ci fu confermata con tutta sicurezza dallo studio delle proprietà ottiche: lamine parallele a }100{ mostrano, a luce convergente, l' emergenza di un asse ottico ai margini del campo di vista; lamine parallele a }001{ mostrano invece nettamente l'emergenza di un asse ottico, sensibilmente normale alla lamina stessa.

« Rare vi sono le geminazioni secondo }100{, che non abbiamo potuto constatare con sicurezza se non in due o tre casi. Le inclusioni sono piuttosto frequenti, e rappresentate, quasi esclusivamente, da certe forme bacillari, o lamellari, sempre allungate, costantemente ordinate in modo regolare, e precisamente così da presentare la direzione di allungamento parallela all'asse delle x del minerale che le contiene. Esse hanno colore verde, paiono affatto isotrope, e talora si mostrano in stretta relazione coi granuli di spinello diffusi nella roccia, dai quali sembrano dipartirsi come sottili apofisi: non è forse da escludere che si tratti realmente di spinello.

« Ma ancora più comuni e interessanti di queste inclusioni propriamente dette, sono le interclusioni, in accrescimento parallelo, di pirosseno trimetrico entro al monoclino. Si tratta del resto di un fenonemo noto da parecchio tempo, e descritto da varî autori in rocce di molte località, sì che ne parleremo affatto sommariamente. Parallelamente alla }100{ del pirosseno monoclino, sono inserite sottilissime lamelle di un pirosseno trimetrico, fresco, e incoloro o roseo; quando la sezione è tagliata perpendicolarmente alla }100{, i due minerali si distinguono facilmente, specie nelle sezioni vicine a }010{, nelle quali è fortissima la inclinazione delle direzioni di estinzione del minerale monoclino rispetto a quelle del trimetrico, le quali, naturalmente, sono parallele e normali alle tracce di pseudo-sfaldatura; se invece il piano della sezione è inclinato sul piano della }100{, allora, causa la estrema sottigliezza della lamina di pirosseno trimetrico, questa non si riconosce più da sola, ma si ha una fascia, più o meno larga, in cui i due minerali si vedono sovrapposti, e, nel caso generale, non si ha quindi mai estinzione completa. Queste lamelle, e, in conseguenza, le zone di sovrapposizione, si ripetono frequentemente in numero notevole. a intervalli quasi regolari, così da impartire alla plaga, tra nicols incrociati, un aspetto molto caratteristico, che rammenta, alla prima osservazione, quello di un minerale pieno di lamelle di geminazione. « Da queste lamelle parallele a }100{ si dipartono

poi molto spesso, isorientate con esse, altre lamine, più corte, ma più grosse, le quali, pure avendo come direzione di massimo sviluppo l'asse delle z comune ai due minerali, sono appiattite secondo la }010{ del pirosseno monoclino (}100{ del trimetrico).

« Nelle sezioni perpendicolari all'asse verticale, tutto ciò si riconosce assai nettamente, ed è ben visibile questo complesso sistema di lamine, le une larghe e sottili, le altre ortogonali alle prime, e più grosse e strette; se poi anche queste seconde sono abbastanza sviluppate in larghezza, allora nelle sezioni oblique si hanno due sistemi di quelle fascie o striscie di sovrapposizione che furono prima accennate, sistemi che possono essere anche molto obliqui l'uno sull'altro. Al pirosseno trimetrico si aggiunge talora anche qualche fibra o bacillo di anfibolo bruno, pure esso, al solito, in accrescimento regolare, così da avere comuni col pirosseno monoclino gli assi delle y e delle z.

« Il *pirosseno trimetrico* forma poi anche da solo granuli numerosi, delle dimensioni degli altri elementi finora descritti, e, al solito, mancanti di ogni contorno cristallino; è però assai meno abbondante dell'olivina e del pirosseno monoclino, e più frequentemente e copiosamente associato a quest'ultimo nelle varietà della roccia più povere di olivina. Le tracce delle sfaldature caratteristiche sono evidentissime, ma più sottili di quelle del monoclino, e tali da impartirgli qualche volta come un'apparenza di fibrosità. Il colore è in generale piuttosto pallido, ma ciò non ostante distintamente riconoscibile, e con marcatissimo pleocroismo, in tinte che vanno da un rossiccio pallido a un verdiccio chiarissimo, quasi incoloro, in sezione sottile; ma in sezioni alquanto più grosse, o in granellini staccati dalla roccia e immersi nell'olio, il colore è assai più intenso, e va dal rosso sangue chiaro al verde chiaro. Come si vede, sono i colori di pleocroismo dell'iperstene, ma più pallidi che non siano ordinariamente; tuttavia, siccome i toni rossi e verdi decisi non sembrano esistere nella bronzite tipica, è probabile si tratti di un termine di passaggio, di un iperstene poco ferrifero; senza escludere però che in altri casi, dove il colore ne è più chiaro, si possa trattare di vera bronzite, e fors'anco talvolta di enstatite. In ogni modo è notevole nel nostro minerale la mancanza assoluta di quelle inclusioni lamellari brune che sono così copiose, anzi caratteristiche, per la maggior parte dei termini più ferriferi della serie dei pirosseni trimetrici.

« L'*anfibolo* è assai scarso nella roccia, anzi vi costituisce un elemento affatto accessorio; è sempre orneblenda basaltica, con un forte pleocroismo dal giallo al bruno rossastro, e si presenta in piccole plaghette, assai spesso concresciute regolarmente col pirosseno. Un anfibolo bruno, con caratteri identici a quelli or ora accennati, fu trovato recentemente dal Brugnatelli [1]

[1] *Osservazioni sulle serpentine del Rio dei Gavi e di Zebedassi.* Rend. Acc. Lincei (5) IV, 1° sem., p. 121.

in alcune serpentine lherzolitiche dell'Appennino Pavese; noi lo abbiamo pure trovato nella roccia di Lherz, in quella di Arguenot (H. Garonne), e in altre lherzoliti tipiche. Anche l'ing. Traverso (1) cita l'orneblenda tra i componenti di talune peridotiti dell'Ossola.

« Causa la stato di grande freschezza della roccia, vi mancano invece assolutamente gli anfiboli verdi di origine secondaria.

« Costantemente presente, in granuli di dimensioni assai mutevoli, e qualche volta in discreta quantità, è un minerale del gruppo dello *spinello*, ma piuttosto variabile per il colore. In sezione sottile diventa trasparente, talvolta con un colore vivace, da verde erba a verde smeraldo; più frequente è una tinta verde-bottiglia scura, e in taluni casi si arriva fino ad un colore bruno intenso. Pare dunque vi siano tutti i passaggi dal pleonasto alla picotite; e precisamente il termine più ricco di cromo sembra preferire le varietà della roccia più ricche di olivina, in cui abbiamo notato pure la presenza di una specie di diopside cromico; mentre le varietà essenzialmente ferrifere e più vivamente verdi paiono essere piuttosto caratteristiche per i campioni con facies pirossenitica.

« Finalmente, come elemento affatto accidentale, in una sola sezione, abbiamo potuto osservare due o tre plaghette assai piccole di un *feldspato plagioclasio,* limpido e incoloro, che presentava le geminazioni riunite dell'albite e del periclino.

« Frequentissimi, e comuni a tutti gli elementi della roccia, sono i fenomeni di alterazione meccanica, i quali si rivelano nelle sezioni sottili sotto forma di curvature, di estinzioni ondulate, e di molteplici screpolature, che si continuano, senza mutar direzione, attraverso plaghe contigue di minerali diversi. Queste fessure giungono talora fino alla completa rottura del minerale, con spostamento dei frammenti, mentre tra le parti allontanate si insinua, cementandole, una pasta di evidente origine clastica, formata da minuti granuli degli stessi elementi che compongono la roccia. Alcuni campioni, raccolti in certi punti dove la roccia presenta macroscopicamente un aspetto assai compatto, mostrano al microscopio di dovere questa loro peculiare apparenza ad una esagerazione dei fenomeni di cataclasi ».

P. B.

(1) Loc. cit.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia prima del 1° settembre 1895.

Matematica. — *Sulla rotazione di un corpo in cui esistono sistemi ciclici.* Nota del Corrispondente VITO VOLTERRA.

« 1. In una Memoria pubblicata nel volume 97 del Giornale di Crelle [1] Helmholtz introdusse il concetto dei sistemi ciclici, il quale ha una importanza fondamentale nella teoria del calore e nella elettrodinamica, come i lavori di lui e di altri hanno dimostrato. Nell'opera postuma di Hertz [2], in cui molte idee di Helmholtz assumono forma sistematica, lo studio dei moti ciclici occupa un posto rilevante.

« Le coordinate indipendenti di un sistema possono distinguersi in due categorie: quelle che non sono contenute esplicitamente nella espressione della forza viva del sistema, ma vi compariscono solo derivate rapporto al tempo, e quelle che figurano esplicitamente nella detta espressione della forza viva [3].

« Le prime si chiamano le *coordinate cicliche* del sistema e le loro derivate le *intensità cicliche*, mentre le altre possono chiamarsi i *parametri* [4]. Le coordinate cicliche esistono in un sistema quando sono possibili dei moti i quali non alterano la distribuzione delle sue masse, e producono

(1) *Principien der Statik monocyklischer Systeme.* Crelle's Journal, Band 97, I. s. 111; II, s. 317. Vedi anche: *Studien zur Statik monocyklischer Systeme.* Sitzb. d. Ak. d. Wiss. zu Berlin 1884. Vedi Helmholtz's Wissenschaftliche Abhandlungen III Band.

(2) *Die Prinzipien der Mechanik,* II Buch Abschnitt. 5.

(3) Il caso così detto di *ignoration of coordinates* era già stato esaminato dai sigg. Thomson e Tait, *Treatise on natural philosophy.* Vol. I, Part. I. Art. 319, Cambridge 1879.

(4) Hertz chiama parametri le coordinate non cicliche solo nel caso in cui il sistema è ciclico, ma può evidentemente estendersi questa denominazione nel caso generale.

solo uno scambio ciclico delle masse fra loro; ma questo, come si riconosce facilmente, non è il solo caso in cui esse si presentano.

« Quando può ritenersi con sufficiente approssimazione che la forza viva del sistema dipenda solo dalle sue intensità cicliche, allora Helmholtz chiama il sistema *ciclico*, e a seconda che esiste una sola, o esistono due o più coordinate cicliche lo denomina monociclico, biciclico, policiclico.

« È evidente che un sistema rigorosamente ciclico non potrà aversi se non quando i parametri saranno costanti.

« 2. Immaginiamo ora un sistema i cui legami non impediscano la rotazione attorno ad un punto, e che abbia un dato numero di coordinate cicliche, in modo che, scelto un certo sistema di assi girevole attorno al punto fisso, le variabili corrispondenti che ne individuano la configurazione, siano, oltre quelle stesse che determinano la posizione di questi assi, un certo numero di coordinate cicliche e di parametri. Supponiamo che il moto del sistema relativamente agli assi stessi sia individuato dai detti parametri e dalle coordinate cicliche. Noi riguarderemo questo moto relativo come il *moto interno del sistema*. Dalla ipotesi che *questo moto interno sia ciclico* non ne viene come conseguenza che il moto assoluto del sistema sia pure ciclico. Infatti la espressione della forza viva sarà costituita dalla forza viva dei moti interni, da quella di trascinamento dovuta alla rotazione degli assi, e finalmente dalla somma dei prodotti delle tre componenti della velocità angolare del sistema secondo gli assi mobili moltiplicate respettivamente per le componenti della coppia di quantità di moto dei movimenti interni nelle medesime direzioni. Ora mentre la prima parte della forza viva conterrà solo i parametri e le intensità cicliche, e la seconda i parametri e le componenti della velocità angolare di rotazione, la terza parte dipenderà anche dalle derivate prime dei parametri, giacchè questi elementi compariranno in generale nelle espressioni delle componenti della coppia di quantità di moto dei movimenti interni.

« Immaginiamo per un momento che gli assi di riferimento siano fissi ed i parametri costanti. Se il sistema sarà abbandonato alla propria inerzia, i *momenti ciclici* e quindi le *intensità cicliche* si manterranno costanti, e perciò in questo caso *il moto sarà ad un tempo adiabatico ed isociclico*.

« Ammettiamo invece che gli assi siano girevoli liberamente attorno alla propria origine; supposti i parametri costanti e mantenendo costanti le intensità cicliche dei moti interni, questi si conserveranno stazionarî e perciò se non esisterà alcuna coppia di rotazione, la questione della rotazione degli assi potrà ricondursi a quella classe di problemi che ho trattati in alcune precedenti Memorie (1) nelle quali venne calcolata l'alterazione che i moti interni stazionarî inducono sul moto di rotazione del sistema.

(1) *Sulla teoria dei moti del polo terrestre; Sul moto di un sistema nel quale sussistono moti interni stazionarî; Sopra un sistema di equazioni differenziali; Un teo-*

« Riportandoci ai resultati ottenuti nelle dette Memorie può concludersi il teorema seguente: *Allorchè un sistema girevole attorno ad un punto fisso non è sollecitato da alcuna coppia di rotazione ed ha nel suo interno dei moti isociclici, (i parametri restando costanti), allora le componenti della rotazione sono funzioni ellittiche del tempo, ed i coseni, che gli assi d'inerzia del sistema formano con gli assi fissi, sono funzioni uniformi del tempo.*

« 3. Ci si può ora chiedere: *Supposti sempre costanti i parametri, sono necessarie delle forze affinchè il moto interno si conservi isociclico?*

In altri termini: *se il sistema è abbandonato alla propria inerzia i moti interni si alterano in intensità o si mantengono isociclici?*

Si può rispondere a questa domanda e dimostrare che, *almeno quando i momenti d'inerzia del sistema sono differenti fra loro, se il sistema è abbandonato interamente alla propria inerzia, e si conservano costanti i parametri, i moti interni non si mantengono isociclici.* Collegando questo resultato con ciò che abbiamo detto precedentemente, si conchiude: *Come i moti interni alterano la rotazione del sistema, così questa influisce sui moti interni*, giacchè se la rotazione non esistesse, il moto sarebbe isociclico.

« Vi è dunque un'azione mutua fra la rotazione del corpo ed i moti ciclici interni.

« Il moto del sistema, allorchè esso è abbandonato interamente alla propria inerzia, può chiamarsi un *moto adiabatico*; però, almeno in generale, *il moto ciclico interno non è adiabatico*, perchè si ha che i momenti ciclici dei moti interni dipendono dalle componenti della rotazione del sistema.

« Trovata una risposta alle precedenti domande, ci possiamo proporre la questione generale: *Un sistema, nel cui interno esistono moti ciclici qualunque* (ammesso sempre che i parametri siano costanti) *è abbandonato alla propria inerzia, come avviene la rotazione del sistema e con quale legge variano le sue intensità cicliche in virtù della mutua azione che fra loro esercitano questi moti?*

« Il problema posto in una forma così generale sembra a primo aspetto molto complicato, giacchè i moti ciclici interni possono immaginarsi in una maniera affatto arbitraria; tuttavia esso è suscettibile di una completa risoluzione, giacchè può ricondursi al caso precedente per mezzo del seguente teorema:

« *Un corpo avente costante la forma e la distribuzione di densità nell'interno del quale esiste un sistema ciclico i cui parametri possono ritenersi*

---

rema sulla rotazione dei corpi — Atti della R. Acc. di Torino. Anno 1894-95. *Sulla teoria dei movimenti del polo terrestre.* Astr. Nachr., Bd. 138, N. 3291-2; *Sulle rotazioni permanenti stabili* ecc. Annali di Mat. T. 23.

invariabili e sulle cui coordinate cicliche non agisce alcuna forza, ruota attorno ad un punto fisso, sotto l'azione di una coppia motrice, come un altro corpo nel quale esistono moti interni stazionarii e che è sollecitato dalla stessa coppia motrice. Le intensità cicliche dipendono in ogni istante dalla rotazione del corpo.

« 4. Per eseguire effettivamente la risoluzione del problema non conviene però di ricondurlo al problema precedente, e quindi applicare le formule che furono date in quel caso nelle Memorie sopra citate.

« È più utile invece operare direttamente sulle equazioni differenziali del problema trasformandole in altre aventi la forma

$$\frac{dx}{dt}=\frac{d\,(\mathrm{F}_1\,,\mathrm{F}_2)}{d\,(y,z)}\,,\;\frac{dy}{dt}=\frac{d\,(\mathrm{F}_1\,,\mathrm{F}_2)}{d\,(z,x)}\,,\;\frac{dz}{dt}=\frac{d\,(\mathrm{F}_1\,,\mathrm{F}_2)}{d\,(x,y)}$$

la cui integrazione ha formato il soggetto di una mia precedente Nota (¹).

« Si giunge così al resultato seguente:

« *Se un sistema girevole attorno ad un punto fisso e nel cui interno esistono moti ciclici (essendo costanti i parametri) è abbandonato alla propria inerzia, le componenti della rotazione e tutte le intensità cicliche sono funzioni ellittiche del tempo ed i coseni degli angoli che gli assi mobili di riferimento formano con assi fissi sono funzioni uniformi del tempo rappresentabili razionalmente mediante funzioni* σ *ed esponenziali nel cui argomento il tempo entra linearmente.*

« *Le espressioni delle componenti* p, q, r *della rotazione del sistema e quelle delle intensità cicliche* ω_i *assumono la forma*

$$p=\frac{\mathrm{M}_1^{(1)}\sigma_1+\mathrm{M}_1^{(2)}\sigma_2+\mathrm{M}_1^{(3)}\sigma_3+\mathrm{M}_1^{(4)}\sigma}{\mathrm{M}_0^{(1)}\sigma_1+\mathrm{M}_0^{(2)}\sigma_2+\mathrm{M}_0^{(3)}\sigma_3+\mathrm{M}_0^{(4)}\sigma}$$

$$q=\frac{\mathrm{M}_2^{(1)}\sigma_1+\mathrm{M}_2^{(2)}\sigma_2+\mathrm{M}_2^{(3)}\sigma_3+\mathrm{M}_2^{(4)}\sigma}{\mathrm{M}_0^{(1)}\sigma_1+\mathrm{M}_0^{(2)}\sigma_2+\mathrm{M}_0^{(3)}\sigma_3+\mathrm{M}_0^{(4)}\sigma}$$

$$r=\frac{\mathrm{M}_3^{(1)}\sigma_1+\mathrm{M}_3^{(2)}\sigma_2+\mathrm{M}_3^{(3)}\sigma_3+\mathrm{M}_3^{(4)}\sigma}{\mathrm{M}_0^{(1)}\sigma_1+\mathrm{M}_0^{(2)}\sigma_2+\mathrm{M}_0^{(3)}\sigma_3+\mathrm{M}_0^{(4)}\sigma}$$

$$\omega_i=\frac{\mathrm{P}_i^{(1)}\sigma_1+\mathrm{P}_i^{(2)}\sigma_2+\mathrm{P}_i^{(3)}\sigma_3+\mathrm{P}_i^{(4)}\sigma}{\mathrm{M}_0^{(1)}\sigma_1+\mathrm{M}_0^{(2)}\sigma_2+\mathrm{M}_0^{(3)}\sigma_3+\mathrm{M}_0^{(4)}\sigma}$$

in cui l'argomento u delle funzioni σ *si esprime mediante il tempo t colla formula*

$$u=n\,(t-t_0)$$

ezsendo n *e* t_0 *quantità costanti, l'ultima delle quali arbitraria.*

(¹) *Sopra un sistema di equazioni differenziali.* Atti della R. Accad. di Torino, 1895.

« *I coefficienti* $M_i^{(s)}$, $P_i^{(s)}$ *sono quantità costanti, ed al pari di n e delle costanti ellittiche si esprimono mediante le radici di una equazione del quarto grado i cui coefficienti sono funzioni razionali delle costanti meccaniche del problema.*

« 5. Il problema è suscettibile di una ulteriore estensione in modo da comprendere in sè il caso del moto isociclico e di quello adiabatico ora esaminato. Si può supporre, cioè, che alcune delle intensità cicliche si conservino costanti in virtù di forze agenti in corrispondenza delle coordinate cicliche stesse, e che sul sistema non siano applicate altre forze che queste, mentre i parametri si mantengono costanti.

« In tale ipotesi possono determinarsi le componenti della rotazione, le intensità cicliche incognite e le dette forze come altrettante funzioni ellittiche del tempo.

« Il problema che in tal modo resta risoluto è assai più complesso di quello Eulero-Jacobi di un sistema rigido, pure le stesse trascendenti, cioè le funzioni ellittiche e le funzioni Jacobiane bastano per ottenerne la soluzione; soltanto queste trascendenti compariscono nelle formule finali in maniera diversa che nella soluzione di Jacobi relativa al sistema rigido.

« È evidente che i resultati enunciati nel § 3 posson trovare una applicazione nel problema della rotazione terrestre. L' esame dei moti ciclici esistenti nella terra in rapporto colla sua rotazione, può essere spinto innanzi nel senso da tener conto, oltre che della azione che i primi esercitano sull' altra, anche della reazione prodotta dal moto di rotazione, sui movimenti ciclici in quanto essa tende per sè, all' infuori di qualsiasi altra causa ad alterarne le intensità.

« Gli sviluppi relativi alle proposizioni enunciate in questa Nota formano il soggetto di un lavoro che verrà inserito negli Annali di Matematica ».

Fisica. — *Calibrazione grafica dei tubi termometrici.* Nota del dott. Quirino Majorana, presentata dal Socio Blaserna.

« Espongo qui un metodo di calibrazione di tubi fondato sul calcolo grafico. Non discuterò l'approssimazione o i vantaggi che esso può presentare, ciò formerà oggetto di un mio prossimo studio; ma mi pare fin d'ora di potere affermare che per la maggior rapidità d' applicazione dei calcoli grafici in genere, rispetto a quelli numerici, sia in certi casi da preferirsi.

Metodo sperimentale.

« Si faccia scorrere lungo tutto il tubo una piccola colonnina di mercurio, e se ne leggano le lunghezze nelle varie posizioni mediante un comparatore, riferendole alla graduazione del tubo. È essenziale per il metodo

che le letture si susseguano per intervalli di tubo abbastanza piccoli ed inferiori alla lunghezza della colonnina, e ciò perchè si possa avere, con sufficiente approssimazione, conoscenza del modo di variare della lunghezza di questa in tutto il tubo da calibrare; ed osservo infine che, per ragioni che si rileveranno in seguito, la lunghezza della colonnina deve essere una piccola parte di tutto il tubo da calibrare. Farò vedere che graficamente, una serie di osservazioni così fatte, fornisce tutti gli elementi per una calibrazione, senza bisogno di ricorrere a letture con colonnine di lunghezza minore o maggiore di quella adoperata.

Curve delle sezioni e dei volumi.

« Sia C_1 una curva che, riferita ad un asse OX (fig. 1), rappresenti le sezioni del tubo da calibrare. Essa non è conosciuta, nè occorre ottenerla, ma ne faccio parola per comodo di ragionamento. La C_1 sia rappresentata in iscala naturale per le ascisse e nella scala n per le ordinate. Poichè sarebbe incomodo riportare tutta la grandezza delle ordinate, a ciascuna di esse è stata tolta la lunghezza costante α.

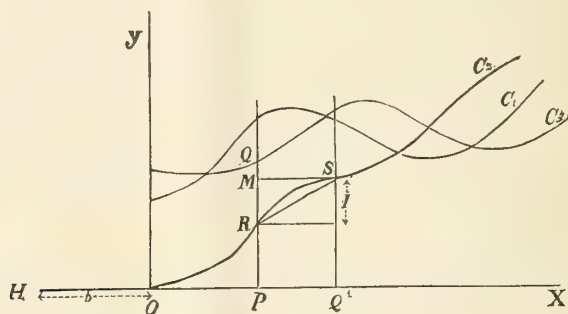



Fig. 1.

« La curva C_2 sia l'integrale della C_1; e si ottiene mediante la proiezione da un polo H alla distanza b (base di riduzione) da O, delle ordinate di C_1 riportate sopra OY. Sicchè per avere l'integrale in un punto P ossia il volume V_o^P del tubo da O a P occorrerà fare

$$V_o^P = \frac{\overline{PR} \cdot b + \alpha \cdot \overline{OP}}{n} .$$

In cui le quantità PR, b, α, OP, rappresentano segmenti espressi in millimetri del disegno, ed n un numero. E per ottenere il volume dentro un tratto PQ' si farà

$$V_P^{Q'} = \frac{(\overline{SQ'} - \overline{PR})\, b + \alpha \cdot \overline{PQ'}}{n} .$$

« La curva integrale C_2, o curva dei volumi del tubo, è una curva di correzione delle letture del tubo. E si capisce che di tali curve ve ne possano essere infinite, dipendentemente dalla scelta della grandezza α.

« Ma nel caso pratico di un termometro due punti della scala, detti *punti fissi*, debbono essere esenti da correzione di calibro. Essi avranno bensì delle correzioni dovute allo spostamento dell'*intervallo fondamentale*; ma queste vengono fatte in precedenza, ed intenderò riferirmi ai punti fissi (0 e 100) corretti. Non si può dunque scegliere arbitrariamente una qualunque delle curve di correzione, ma la C_2 deve toccare l'asse delle X in entrambi gli estremi dell'intervallo fondamentale. Scaturisce da ciò quale debba essere la grandezza di α, al fine di sodisfare a questa condizione. Il significato geometrico della grandezza α si trova subito considerando la fig. 2. In questa si vedono disegnate la C_1 e la C_2. Quest'ultima interseca l'asse delle ascisse anche nei punti 0 e 100. Ma poichè essa è l'integrale della C_1, l'area intercetta tra questa e l'asse delle X dentro l'intervallo fondamentale, è nulla. Vale a dire che la somma delle aree dei *monti* è uguale alla somma delle aree delle *valli*. E dunque *la grandezza α è tale che la posizione dell'asse delle* X *debba essere una retta di compenso della curva delle sezioni, dentro l'intervallo fondamentale.*

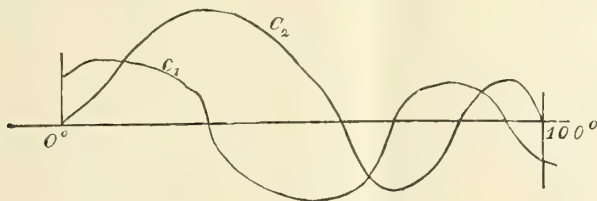



Fig. 2.

Passaggio dalla curva sperimentale a quella dei volumi.

« Sperimentalmente troviamo una terza curva C_3 (fig. 1). Si ottiene riportando sopra ogni punto dell'asse delle ascisse, delle ordinate che sono eguali alla lunghezza che assume un volume V di mercurio costante, a partire dal punto stesso. Siccome qualora tali lunghezze venissero riportate nella loro vera grandezza, la C_3 risulterebbe sensibilmente una linea retta, e ciò perchè piccolo è l'errore variabile delle sezioni del tubo, così occorre, anche qui, moltiplicare la scala. Le lunghezze, quindi, della quantità V di mercurio sono moltiplicate per il coefficiente m, e riportate al disopra dell' asse delle X, dopo essere state diminuite tutte della quantità β. Mi propongo di cercare un mezzo per passare dalla C_2 alla C_3.

« Considero il punto P. Se il volume V di mercurio si trovasse col suo estremo di sinistra in questo punto, esso occuperebbe una certa lunghezza PQ'. L'ordinata PQ della C_3 rappresenta il ribaltamento del segmento PQ'

(con le debite osservazioni di scala) sopra la verticale per P. La differenza I tra le due ordinate per P e Q′, della curva integrale C_2, è il segmento integrale che corrisponde al volume V, nella speciale posizione di questo. Per cui

$$V = \frac{I \, . \, b + \alpha \, . \, \overline{PQ'}}{n} \, .$$

Dalla quale si scorge che, se fosse noto I, basterebbe, per ottenere il segmento PQ′, staccare al disopra di PR un segmento $RM = I$, condurre per M la parallela ad OX e da S (punto di incontro con C_2) abbassare la perpendicolare ad OX. Ma dalla relazione testé stabilita si scorge che poichè V è costante, e PQ′ è variabile anche I deve essere variabile. E allora se si vuol trovare il PQ′ bisogna procedere per successive approssimazioni. Vale a dire si comincia a stabilire un valore prossimo al vero per PQ′; sostituendolo nella precedente formula insieme al valore di I, desunto dal disegno, si vedrà se V ritorna esatto, e in caso contrario si faranno altri tentativi sino a sodisfare la formula.

« Si ha dunque il PQ′ secondo la relazione:

$$PQ' = \frac{Vn - I \, . \, b}{\alpha}$$

per ottenere PQ infine:

$$PQ = \overline{PQ'} \, . \, m - \beta$$

in tal guisa, per punti, si può costruire la curva C_3.

« Ma il caso, che si presenta in pratica, è il reciproco. Vediamo dunque come può farsi il passaggio inverso. Intanto considerando Q il segmento PQ′ è subito trovato, dovendo rispondere alla relazione

$$\overline{PQ'} = \frac{\overline{PQ} + \beta}{m}$$

Il volume V può fissarsi ad arbitrio e definitivamente e si ha:

$$I = \frac{Vn - PQ' \, . \, \alpha}{b} = \frac{Vn}{b} - \frac{\overline{PQ'} \, . \, \alpha}{b}$$

dove tutto è conosciuto.

Spezzate integrali.

« Avremo dunque la corda RS. Ma la sua posizione assoluta non è determinata; certo essa potrà solo spostarsi parallelamente a sè stessa, e mantenendo i suoi estremi sopra le ordinate per R e per S; e si può quindi, dato un punto qualunque della curva ricercata C_3, determinare in grandezza, posizione e senso una corda ed una sola, che vada da sinistra verso destra.

« Sia ora la C_3 (fig. 3); si può cominciare a costruire una prima corda OD_1. Essa certo deve passare per l'origine 0, poichè, è zero il volume in quel punto. Dal punto D_1 potrà ancora essere costruita la successiva corda D_1D_2, e così di seguito ed indefinitamente. Otterremo in tal guisa una spez-

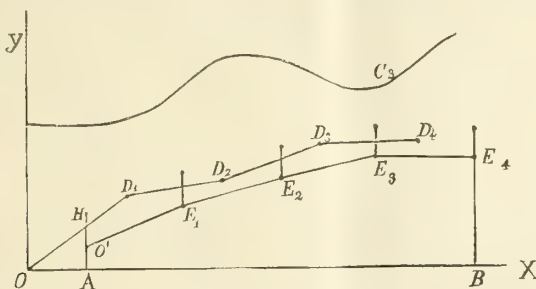



Fig. 3.

zata $OD_1D_2D_3$ etc., la quale è certo inscritta nella curva integrale cercata; ma non è conosciuto l'andamento di questa dentro ai tratti OD_1, D_1D_2 . . . . Appare però evidente che determinato il primo tratto di curva OD_1, tutti gli altri tratti verrebbero ad esser conosciuti, poichè per ogni punto intermedio di OD_1 si ripeterebbe costruzione analoga, venendo così a trovare altre spezzate i cui vertici sarebbero compresi tra quelli della prima. Fissiamo dunque ad arbitrio un punto O', compreso tra O e D_1; partendo da esso si otterrà una seconda spezzata $O'E_1E_2E_3$ etc. I vertici di essa probabilmente non saranno della curva ricercata, ma le loro ordinate sarebbero anche ordinate di quest'ultima, se fossero aumentate di un segmento costante che non è conosciuto.

Combinazione delle spezzate integrali.

« Il problema adunque come si presenta è indeterminato; ma si può trovare una curva che sodisfi a tutte le spezzate che si possono costruire e che presenti la massima probabilità di essere. Il segmento PQ' (della fig. 1) generico, rappresenta la lunghezza variabile che assume il volume V nelle sue varie posizioni. Ora, poichè tale lunghezza è riportata nella sua vera grandezza sull'asse delle ascisse, e poichè in pratica sono piccolissime le va-

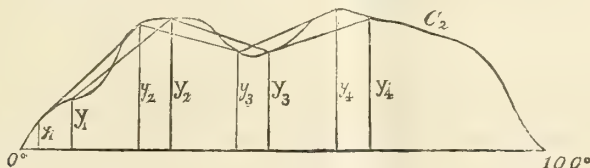



Fig. 4.

riazioni di essa per effetto degli errori delle sezioni del tubo, così, a meno di errori inferiori al grafico, si può ritenere che PQ' sia costante. In base a questa considerazione immagino una prima spezzata inscritta nella curva C_2 dei volumi (fig. 4.) I vertici di essa si appoggino a delle ordinate equidi-

stanti pel segmento PQ′ che suppongo uguale all'unità. Per quanto sia lungo lo sviluppo della C_2 per considerazioni precedenti si sa che essa interseca l'asse della X almeno nei due punti estremi, ciò che assicura che le lunghezze delle ordinate estreme della spezzata saranno o zero od in ogni modo di grandezza finita, ammettendo come è naturale la continuità della funzione incognita che rappresenta le sezioni del tubo. Sieno y_1, y_2 ..... y_n le ordinate di questa spezzata. L'area intercetta tra essa e l'asse OX è data da

$$A = \frac{y_1 + y_2}{2} + \frac{y_2 + y_3}{2} + \dots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2},$$

cioè,

$$2A = y_1 + 2y_2 + 2y_3 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n .$$

« Considero una seconda spezzata, spostata rispetto alla prima per una costante ε. La nuova area sarà:

$$2A' = Y_1 + 2Y_2 + 2Y_3 + \cdots + 2Y_{n-1} + Y_n .$$

Facciasi la differenza:

$$2(A - A') = (y_1 - Y_1) + 2(y_2 - Y_2) + \dots + 2(y_{n-1} - Y_{n-1}) + (y_n - Y_n) .$$

« Le differenze che figurano nel secondo membro, data la natura accidentale della curva, possono con egual probabilità presentarsi positive o negative. Se ne deduce che per uno sviluppo sufficientemente grande delle 2 spezzate (teoricamente infinito), per il principio di Bernouilli, il valore di quella espressione deve essere zero.

« Se si vuole quindi che diverse spezzate, appartenenti alla stessa curva, e spostate l'una rispetto alle altre, vengano a comporre la curva cercata, basterà, nel nostro caso, quando cioè sia sufficientemente piccolo il volume elementare di mercurio, e grande l'intervallo fondamentale, fare in guisa che tutte le spezzate vengano ad intercettare la stessa area con l'asse delle X, e con le loro ordinate estreme.

Spostamento delle spezzate.

« Sieno le due spezzate della fig. 3; si stabiliscano due ordinate estreme come quelle per A e per B, che le intersechino entrambe; se ne facciano gli integrali grafici dentro A e B con una base di riduzione arbitraria. Se essi risultano eguali, le due aree intercette con OX sono eguali, e non occorrerà fare spostamento alcuno; se diseguali, basterà spostare la seconda spezzata rispetto alla prima di un segmento O′H il cui valore è dato da

$$O'H = \frac{I_d - I_e}{\overline{AB}} \cdot b$$

dove i due I sono i segmenti integrali delle due spezzate e b la base di ri-

duzione. È del resto facilissimo trovare il valore di O'H graficamente, in base alla stessa formula.

« Si costruiscono in tal guisa quante spezzate si crede sieno necessarie alla completa determinazione della curva, e salvo la prima, che certamente deve partire dall'origine, tutte le altre si assoggetteranno a spostamento. Congiungendone infine i vertici, si otterrà la curva integrale ricercata.

Sezione media dell'intervallo fondamentale.

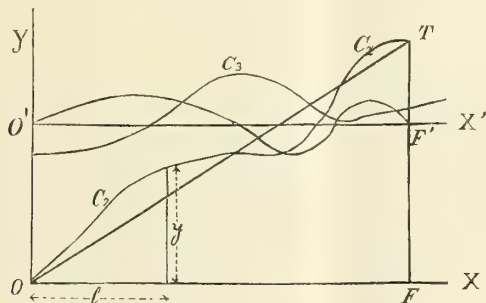



Fig. 5.

« Sia dunque la OC_2 la curva integrale (fig. 5). Considero una lettura l fatta sul tubo; il volume sarà dato da

$$V_o^l = l \cdot \frac{\alpha}{n} + \frac{yb}{n}.$$

Se il tubo fosse calibro la correzione da fare alla lettura l sarebbe nulla; ma, nel caso della figura, si scorge che nel tratto l esso ha una sezione sempre superiore ad $\frac{\alpha}{n}$. Quindi la lettura corretta L sarebbe quella che si farebbe qualora tutto il volume V_o^l fosse ripartito in un tubo di sezione $\frac{\alpha}{n}$. Cioè:

$$L = \frac{V_o^l}{\frac{\alpha}{n}} = l + \frac{y \cdot b}{\alpha}.$$

« Questa espressione ci dice che tutte le letture che si fanno sul tubo, tolta quella all'origine, sono da correggersi, poichè nel caso della figura la curva C_2 non interseca l'asse OX, che in O. Ma il fatto che l' estremo T della curva integrale non si trova sopra OX, dipende dal non avere scelto convenientemente la grandezza α; chè se si vuole che la curva di correzione dia per esatta la lettura fatta sul 100 del termometro, α deve, come feci vedere, essere tale che l'asse delle X sia una retta di compenso della curva

delle sezioni, la quale del resto non si conosce. Occorre dunque modificare la posizione di OX in guisa da sodisfare a quella esigenza. Ora l'essere FT diverso da zero dimostra che α non rappresenta la sezione media del tubo, e che questo, su α, ha un eccesso di volume di

$$\frac{\overline{FT} \cdot b}{n} .$$

E se si sposta l'asse OX di

$$FF' = \frac{\overline{FT} \cdot b}{\overline{OF}}$$

e si ricostruisce, come prima si è fatto, la linea integrale O'SF', questa certamente toccherà l'asse O'F' nei due punti fissi.

« Ma poichè l'integrale del rettangolo OFF'O', è dato dalla corda OT, così basterà riportare sopra O'F' in valore e segno i segmenti verticali intercetti tra la prima curva C_2 e la corda OT.

« Volendo servirsi della curva di correzione basterà applicare la relazione:

$$L = l + \frac{y \cdot b}{\alpha'}$$

dove

$$\alpha' = \alpha + \frac{\overline{FT} \cdot b}{\overline{OF}}$$

« Concludo facendo osservare che dalle operazioni sperimentali che si fanno nella calibrazione, non risulta mai la conoscenza assoluta delle sezioni del tubo; i valori di α quindi che figurano poi nel calcolo grafico sono fittizi, e non sono che delle costanti introdotte per comodità e che si riferiscono allo speciale disegno eseguito ».

CORRISPONDENZA

Ringraziarono per le pubblicazioni ricevute:

La R. Accademia delle scienze di Lisbona; la Società Reale di Londra; la Società di scienze naturali di Emden; la Direzione dei lavori geologici di Lisbona; il R. Osservatorio di Milano; le Università di Cambridge, di Glasgow e d'Upsala.

Annunciarono l'invio delle proprie pubblicazioni:

Il R. Ufficio geologico di Roma; la Società zoologica di Londra.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

dal 5 agosto al 1º settembre 1895.

Carta idrografica d'Italia. Relazioni. — Piemonte. — Roma, 1895. 4°.

Catalog der Astronomischen Gesellschaft. St. X. Leipzig, 1895. 4°.

Catalogue of the library of the Institute of Civil Engineers. Vol. I-III. London, 1895. 8°.

Chyzer C. & *Kulczynski L.* — Araneae Hungariae. T. I, II, 1. Budapestini, 1892-94. 4°.

De Lorenzo G. — Efflusso di lava dal gran Cono del Vesuvio, cominciato il 3 luglio 1895. Napoli, 1895. 8°.

De Tillo A. — Sur la necessité d'une Association Cartographique internationale. S. Pétersbourg, 1895. 8°.

Lussana S. — Anomalia nella resistenza elettrica delle soluzioni in corrispondenza alla temperatura del massimo di densità. Siena, 1895. 8°.

Id. — Osservazioni sismiche fatte col microsismografo Vicentini nell'Osservatorio geodinamico di Siena. Siena, 1895. 8°.

Id. — Sul calore specifico dei gas. Pisa, 1895. 8°.

Memorie descrittive della Carta geologica d'Italia. Vol. IX. — *Cortese.* Descrizione geologica della Calabria. Roma, 1895. 8°.

Mosso U. — Influenza del Curaro sulla temperatura del corpo. Genova, 1895. 8°.

Id. — La materia medica in Italia nel 1894. Genova, 1895. 8°.

Id. e *Paoletti L.* — Sull'azione fisiologica della formalina. Torino, 1895. 8°.

Ottolenghi F. — Sull'azione fisiologica della Malachina e di una sua nuova operazione terapeutica. Genova, 1895. 8.°

Pincherle S. — Sulle operazioni distributive commutabili con una operazione data. Torino, 1895. 8°.

Rogers H. R. — The Sun's Dazzle. Dunkirk, 1895. f.°

Saccardo P.A. — Sylloge fungorum omnium hucusque cognitorum. Vol. X. Supl. p. 3. Patavii, 1895. 8°.

Théel H. — Om Sveriges zoologiska Hafsstation Kristineberg. Stockholm, 1895. 8°.

Wild H. — Das Konstantinow'sche meteorologische und magnetische Observatorium in Pawlowsk. S. Petersburg, 1895. 4°.

P. B.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia prima del 15 settembre 1895.

Matematica. — *Sul moto di un sistema nel quale sussistono moti interni variabili.* Nota del Corrispondente VITO VOLTERRA.

« Il prof. Peano in una Nota presentata all'Accademia di Torino nella seduta del 23 giugno u. s., e testè escita alla luce, mostra che in un sistema simmetrico attorno ad un asse che mantiene costante la forma e la distribuzione di densità, possono farsi variare i moti interni (conservandone piccolissima la coppia di quantità di moto) con una legge tale che il polo di rotazione vada continuamente allontanandosi dal polo d'inerzia.

« Poichè questo resultato può ottenersi come una evidente ed immediata conseguenza di formule di considerazioni da me esposte in alcune precedenti Memorie che il prof. Peano si dimentica di citare, sebbene pubblicate quest'anno negli stessi Atti dell'Accademia di Torino, così mi permetto di mostrarlo qui evitando l'impiego, fatto dal detto autore, di metodi e di notazioni non accettati generalmente e di procedimenti poco appropriati a rendere chiara la via tenuta ed il resultato conseguito.

« Le formule a cui mi riferisco sono le seguenti

$$(a)\ \begin{cases} A\dfrac{dp}{dt} + (C - B)\,qr + m_3\,q - m_2\,r + \dfrac{dm_1}{dt} = 0 \\ B\dfrac{dq}{dt} + (A - C)\,rp + m_1\,r - m_3\,p + \dfrac{dm_2}{dt} = 0 \\ C\dfrac{dr}{dt} + (B - A)\,pq + m_2\,p - m_1\,q + \dfrac{dm_3}{dt} = 0 \end{cases}$$

nelle quali m_1, m_2, m_3 denotano le componenti della coppia di quantità di moto dovuta ai moti interni secondo gli assi principali centrali d'inerzia;

p, q, r sono le componenti della rotazione secondo gli stessi assi e A, B, C sono i momenti principali centrali d'inerzia che debbono supporsi costanti finchè si ammette che i moti interni non alterino la forma e la distribuzione di densità del corpo [1].

« In una Memoria pubblicata nelle *astronomische Nachrichten* [2] ho mostrato che, scelto ad arbitrio il moto del polo, e quindi la relativa *polodia* sull'ellissoide d'inerzia, si possono calcolare i moti interni che inducono il detto movimento del polo ed ho anche indicato le formule per raggiungere il resultato.

« Si osservi ora che se l'ellissoide d'inerzia è di rivoluzione ed i moti interni sono nulli, le polodie sono, come è ben noto, i paralleli dell'ellissoide. Volendo dunque ottenere un moto che allontani sempre più il polo di rotazione dal polo d'inerzia mediante moti interni piccolissimi, basterà evidentemente scegliere come polodia una curva a spirale sull'ellissoide d'inerzia, le cui spire si avvicinino ai paralleli dell'ellissoide, e determinare quindi moti interni che corrispondano alla detta polodia. Quanto più strette saranno le spire e quindi quanto meno si discosteranno dai paralleli, tanto più piccola resulterà la quantità di moto dei moti interni necessaria ad indurre la deviazione del polo dai paralleli stessi e perciò tanto più grande sarà il cammino che dovrà descrivere il polo di rotazione per raggiungere una data deviazione da quello di inerzia.

« Per rendere assolutamente intuitivo il calcolo, si facciano comparire nella (a) i coseni $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ che l'asse fisso della coppia di quantità di moto forma con gli assi d'inerzia. Posta la quantità costante

$$(Ap + m_1)^2 + (Bq + m_2)^2 + (Cr + m_3)^2 = K^2$$

avremo (Vedi note citate)

$$(1) \qquad \gamma_1 = \frac{Ap + m_1}{K}, \quad \gamma_2 = \frac{Bq + m_2}{K}, \quad \gamma_3 = \frac{Cr + m_3}{K}$$

onde se $B = A$, e si pone

$$K\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{C}\right) = \lambda, \quad a = \frac{m_1}{A}, \quad b = \frac{m_2}{A}, \quad c = \frac{m_3}{C}$$

le (a) diverranno

$$\frac{d\gamma_1}{dt} + \lambda\,\gamma_2\,\gamma_3 + c\,\gamma_2 - b\,\gamma_3 = 0$$

$$\frac{d\gamma_2}{dt} - \lambda\,\gamma_3\,\gamma_1 + a\,\gamma_3 - c\,\gamma_1 = 0$$

$$\frac{d\gamma_3}{dt} + b\,\gamma_1 - a\,\gamma_2 = 0$$

(1) *Sulla teoria dei moti del polo terrestre.* Atti R. Acc. di Torino, 1895.

(2) Bd. 138, N. 3291-92. Art. IV. — Vedi anche la Nota citata precedentemente.

le quali in ultima analisi non rappresentava che le formule di Poisson, in cui le componenti p, q, r della rotazione siano ricavate dalle (1) espresse mediante i coseni di direzione γ_1, γ_2, γ_3.

Posto $\gamma_1 = \text{sen}\,\theta \cos\varphi \;,\; \gamma_2 = \text{sen}\,\theta\, \text{sen}\,\varphi \;,\; \gamma_3 = \cos\theta \,,$

con $\varphi = \lambda \int \cos\theta\, dt$

le equazioni precedenti assumeranno la forma

$$\begin{aligned} \theta' \cos\theta \cos\varphi + c\gamma_2 - b\gamma_3 &= 0 \\ \theta' \cos\theta\, \text{sen}\,\varphi + a\gamma_3 - c\gamma_1 &= 0 \\ -\theta' \text{sen}\,\theta \qquad + b\gamma_1 - a\gamma_2 &= 0 \end{aligned}$$

le quali sono soddisfatte prendendo

$$a = -\theta' \text{sen}\,\varphi \;,\; b = \theta' \cos\varphi \;,\; c = 0$$

quindi

$$\text{M} = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2} = \theta' \text{A}$$

« Prendendo θ' costante e piccolissimo la grandezza M delle coppie di quantità di moto dei movimenti interni si conserverà piccolissima, mentre avremo

$$p = \frac{\text{K}\gamma_1 - m_1}{\text{A}} = \frac{\text{K}}{\text{A}}\, \text{sen}\,\theta \cos\varphi + \theta' \text{sen}\,\varphi$$

$$q = \frac{\text{K}\gamma_2 - m_2}{\text{A}} = \frac{\text{K}}{\text{A}}\, \text{sen}\,\theta\, \text{sen}\,\varphi - \theta' \cos\varphi$$

$$r = \frac{\text{K}\gamma_3 - m_3}{\text{C}} = \frac{\text{K}}{\text{C}} \cos\theta$$

d'onde chiamando ψ l'angolo che l'asse d'inerzia forma con quello di rotazione

$$\text{tg}\,\psi = \frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{r} = \frac{\sqrt{\dfrac{\text{K}^2}{\text{A}^2}\,\text{sen}^2\,\theta + \theta'^2}}{\dfrac{\text{K}}{\text{C}} \cos\theta}$$

formula che prova che ψ va continuamente aumentando se θ' è positivo, e può raggiungere e sorpassare il valore $\frac{\pi}{2}$.

« La possibilità che dopo un certo tempo l'azione dei moti interni produca uno spostamento grande del polo di rotazione rende insufficiente, allorchè si vogliono studiare i piccoli moti del polo di rotazione (indotti da moti interni variabili) di porre la condizione che la grandezza della coppia di quantità di moto di questi non oltrepassi un certo limite.

« È perciò che volendo seguire una trattazione rigorosa nell'esame di questa questione, ho tenuto un cammino diverso in una mia precedente Memoria [1]. In essa sono partito esplicitamente dalla ipotesi che durante tutto l'intervallo di tempo (dell'ordine delle grandezze finite) in cui si studia il moto, il polo di rotazione eseguisca dei piccoli movimenti attorno al polo d'inerzia con date leggi e ho cercato quali sono i moti interni capaci di indurre i detti movimenti. Quindi nulla infirma la legittimità della determinazione dei moti interni fatta in questa maniera ».

Chimica. — *Sintesi nella serie degli acidi adipici* [2]. Nota preliminare del dott. C. Montemartini, presentata dal Socio Paternò.

« I lavori di Bischoff, di Auwers, di V. Meyer e di altri, hanno dimostrato che quando sul composto sodico dell'etere etilico dell'acido malonico, o di un acido alchil-malonico, si fa reagire un etere di un acido grasso alogenato, la reazione che ha luogo è molto complessa perchè per il sovrariscaldamento dell'acido tribasico, primo prodotto della reazione, oltre all'originarsi acidi bibasici sostituiti stereoisomeri, si formano pure acidi bibasici isomeri pel cambiamento di posizione dell'elemento alogeno nella molecola dell'etere dell'acido grasso monobasico. Le reazioni meglio studiate, e sulle quali le recenti esperienze di Auwers [3] hanno portato luce riguardo al loro meccanismo, sono specialmente quelle di condensazione dell'etere sodio-malonico coll'etere α-bromo-isobutirrico, ove, oltre ad acidi della serie succinica, si ottengono pure acidi della serie glutarica, e quindi l'acido alogenato funziona come un α e come un β derivato.

« Finora non sono state tentate simili reazioni con acidi alogenati γ che conducono ad acidi adipici, ed io ho da parecchio tempo intrapreso questo studio che offre un certo interesse sotto diversi punti di vista.

« Prima di tutto nella serie adipica non si trova altro fatto ben constatato di stereoisomeria, all'infuori di quello degli acidi $\alpha\alpha'$-dimetil-adipici di Zelinsky, e gli acidi adipici monosostituiti che si ottennero o per sintesi da Perkin e Bone, o come prodotti di ossidazione del Pulegone e del Mentone da Semmler, Wagner e da Manasse e Rupe, non hanno presentato finora casi di stereoisomeria.

« In secondo luogo venne dimostrato da V. Meyer che l'acido adipico non dà anidride, mentre l'acido β-metil-adipico pare suscettibile di darla; quindi

[1] *Sui moti periodici del polo terrestre*. Atti R. Acc. di Torino, 5 maggio 1895. — Osservazioni sulla detta Memoria, 23 giugno 1895. — Vedi specialmente la Nota posta alla fine della prima Memoria.

[2] Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica farmaceutica della R. Università di Roma.

[3] Annalen, 285, pag. 241 e seguenti.

si presenta il problema di stabilire quale influenza abbia la natura e la posizione del gruppo alchilico sostituente nell'anidrificazione di questi acidi.

« Finalmente rimane da stabilire se nell'acido grasso γ-alogenato, l'elemento alogeno gode di una certa mobilità, come succede per l'etere α-bromoisobutirrico.

« Come materiale di facile preparazione ho adoperato nelle mie ricerche l'etere γ-clorobutirrico, e su di esso ho fatto reagire l'etere sodio-malonico e l'etere metil- ed etil-sodio-malonico. Le mie ricerche non sono ancora completate, ma siccome il lavoro richiede per l'esecuzione un tempo discretamente lungo, ed altri chimici potrebbero entrare in questo frattempo nel mio campo di ricerche, così credo utile pubblicare sommariamente i risultati sinora ottenuti, riservandomi di pubblicare dettagliatamente nella Gazzetta chimica italiana le esperienze eseguite ed i risultati ottenuti, a lavoro compiuto.

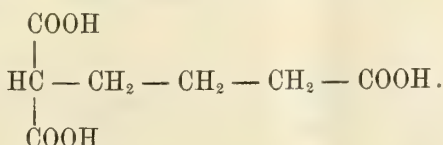
Acido adipico.

« Facendo agire l'etere γ-cloro-butirrico sull'etere sodio-malonico, ottenni, insieme a piccole porzioni di etere butirrico inalterato, un olio incoloro che alla pressione di 30 mm. distilla fra 175°-185° e che rettificato bolle alla temperatura di 175°-176° a 18 mm. La sua densità è 1,0726 a 15°, e la sua composizione è quella dell'etere etilico di un acido tribasico, e corrisponde alla formola $C_{13}H_{22}O_6$:

	trovato	calcolato
C	56,25	56,93
H	8,03	8,03

« Il rendimento in questo etere è di circa 70 % del teorico.

« La saponificazione dell'etere avviene pressochè quantitativamente quando la si fa con una soluzione alcoolica di potassa. L'acido che ne risulta è quasi insolubile in benzina bollente, molto solubile invece nell'etere acetico col quale dà soluzioni soprasature da cui cristallizza difficilmente; si ha bene cristallizzato in aghi che si raggruppano in piccole sfere con una miscela di benzina ed etere acetico. Comincia a fondere a circa 130° dando acido carbonico. La sua composizione è rappresentata dalla formola

$$\begin{array}{l} COOH \\ | \\ HC - CH_2 - CH_2 - CH_2 - COOH. \\ | \\ COOH \end{array}$$

« Questa formola è confermata dalla seguente analisi:

	trovato	calcolato per $C_7H_{10}O_6$
C	44,17	44,21
H	5,46	5,26

« È pure confermata dalla quantità di soluzione decimo normale di Na OH necessaria per neutralizzare un dato peso di acido, e finalmente dalla composizione del sale d'argento e di calcio.

« Il sale d'argento precipita da una soluzione di sale sodico trattata con nitrato d'argento; è cristallino ed un po' solubile nell'acqua a caldo:

	trovato	calcolato per $C_7 H_7 O_6 Ag_3$
Ag	63,42	63,40

« Il sale di calcio fu preparato coll'acido ed ossido di calcio. È meno solubile nell'acqua fredda che nella calda; essicato a 180° diede all'analisi:

	trovato	calcolato per $(C_7 H_7 O_6)_2 Ca_3$
Ca	24,24	24,29

« Dal descritto acido tribasico si passa facilmente, e con rendimento quasi teorico, all'acido adipico con distillazione nel vuoto. L'acido adipico fu identificato mediante la sua forma cristallina, e mediante combustione che diede:

	trovato	calcolato per $C_6 H_{10} O_4$
C	49,01	49,31
H	6,96	6,85

« Fu pure identificato mediante il sale di calcio la cui analisi diede:

	trovato	calcolato per $C_6 H_8 O_4 Ca + H_2 O$
Ca	19,73	19,80
H_2O	8,85	8,90

« Fra i varî metodi conosciuti di preparazione dell'acido adipico credo che l'esposto sia il più facile e quello che dà il migliore rendimento. Nella reazione descritta non si potè constatare la contemporanea formazione di un altro acido isomero, perciò pare che in queste condizioni il cloro dell'acido γ-clorobutirico non subisca nessun mutamento di posizione.

Acido α-metil-adipico.

« Per l'azione dell'etere γ-clorbutirrico sull'etere metil-sodio-malonico si giunge a separare, mediante distillazione nel vuoto, un olio incoloro, bollente tra 181°-183° a 12 mm. di pressione. La composizione di questo etere di acido tribasico è rappresentata dalla formola $C_{14} H_{24} O_6$:

	trovato	calcolato
C	58,30	58,33
H	8,49	8,33

« L'etere ottenuto si saponifica facilmente con potassa alcoolica convertendosi nel corrispondente acido tribasico.

« Questo acido è un denso sciroppo che non cristallizzò tenendolo varî giorni nel vuoto su acido solforico; non fu perciò ulteriormente studiato, ma lo si convertì in acido α-metil-adipico distillandolo nel vuoto. Il rendimento oscilla tra 15 e 20 % del teorico.

« L'acido bibasico preparato in tal modo distilla a 220° alla pressione di 22 mm. L'analisi dimostra che esso ha la composizione di un acido metil-adipico:

	trovato	calcolato per $C_7 H_{12} O_4$
C	52,32	52,50
H	7,78	7,50

ed alla stessa formola conduce l'analisi del suo sale di argento che è insolubile nell'acqua:

	trovato	calcolato per $C_7 H_{10} O_4 Ag_2$
Ag	57,87	57,75

« Il sale di calcio è solubilissimo nell'acqua a freddo, e deposita cristallino quando se ne fa bollire una soluzione molto concentrata.

« L'acido libero, appena preparato, è un liquido vischioso; tenuto varî giorni su acido solforico nel vuoto si cominciano a deporre dei minuti cristalli. Separandoli man mano si producevano, mediante filtrazione sotto pressione, potei avere due porzioni, di cui una solida e l'altra liquida. La solida fonde a 63°-64° e corrisponde perfettamente all'acido α-metil-adipico descritto recentemente da Bone e Perkin (1) e preparato per condensazione dell'etere metil-malonico coll'etere dell'acido trimetilendicarbossilico. La parte liquida rimase tale anche dopo averla tenuta per due mesi sull'acido solforico nel vuoto; lasciata per dodici ore in una miscela frigorifera non cristallizzò; l'analisi rivelò che la sua composizione è identica a quella della parte solida:

	trovato		calcolato per $C_7 O_4 H_{12}$
	liquido	solido	
C	52,80	52,32	52,50
H	7,80	7,78	7,50

« Resta ora a vedere se i due acidi separati sono due acidi α-metil-adipici stereoisomeri, o semplicemente due acidi bibasici isomeri, ed a questo scopo cercai di convertirli uno nell'altro. L'acido liquido, scaldato in tubo chiuso a 180° con acido cloridrico, rimane liquido; rimane pure liquido trattandolo con cloruro di acetile e riprendendo con acqua il prodotto della reazione. Anche l'acido solido non si modifica quando è sottoposto agli stessi

(1) Journ. of Ch. Sc. 1895, pag. 115.

trattamenti. Il fatto che con queste operazioni non si possono convertire i due acidi uno nell'altro, e l'avere Bone e Perkin nel citato lavoro descritto un solo acido α-metil-adipico, lascia supporre che qui non si tratta di due acidi adipici, e ciò non si potrebbe altrimenti spiegare che ammettendo, come accennai in principio, un salto del cloro dell'etere γ-clorobutirrico quando reagisce sull'etere metil-sodio-malonico, e la conseguente formazione di un acido glutarico disostituito. Coll'ossidazione dei due acidi, e sopratutto con un metodo diverso di sintesi, e cioè preparando prima l'etere tribasico che mi diede l'acido adipico ed in esso introducendo un metile, mi sarà permesso di risolvere la questione.

« Non posso tralasciare di notare che pel trattamento con cloruro di acetile entrambi gli acidi descritti danno un'anidride liquida, insolubile nell'acqua, non molto stabile.

Acido α-etil-adipico.

« Trattando l'etere γ-cloro-butirrico con etere etil-sodio-malonico, si separa un olio che a 35 mm. di pressione bolle a 205°-208° e che sarebbe l'etere trietilico di un acido tribasico avente la composizione $C_9H_{14}O_6$. L'analisi infatti dà:

	trovato	calcolato per $C_{15}H_{26}O_6$
C	58,80	59,60
H	8,37	8,69

« Distillando nel vuoto l'acido tribasico corrispondente a questo etere, si ottiene un acido bibasico che si conserva liquido tenendolo nel vuoto su acido solforico; l'analisi rivela che ha la composizione di un acido etil-adipico:

	trovato	calcolato per $C_8H_{14}O_4$
C	54,85	55,17
H	8,00	8,05

« Anche il sale d'argento confermerebbe questa composizione centesimale:

	trovato	calcolato per $C_8H_{12}O_4Ag_2$
Ag	55,75	55,66

« Il sale di calcio è deliquescente e molto più solubile a caldo del precedente sale dell'acido metil-adipico.

« Nell'ipotesi che si trattasse di una miscela di due acidi stereoisomeri, di cui uno solido, scaldai con acido cloridrico in tubo chiuso, ma il prodotto dopo tale trattamento non solidificò ».

Fisiologia. — *Contributo alla localizzazione corticale dei poteri inibitori.* Nota del prof. Giulio Fano, presentata dal Socio Luciani.

« Per mezzo di uno speciale apparecchio che ho fatto costrurre nel mio laboratorio e che verrà descritto a suo tempo, il dott. Libertini ha potuto con molta facilità ed esattezza determinare il tempo di reazione nei cani normali od in vario modo operati. Con esso infatti si ottengono contemporaneamente registrati sopra un cilindro affumicato ruotante, il momento nel quale uno degli arti dell'animale è eccitato per mezzo di una scossa di apertura, la reazione motrice, ed il tempo segnato da 100 vibrazioni doppie per minuto secondo. Ordinariamente si registrava la reazione motrice dell'arto stesso che veniva stimolato, e ciò per mezzo di un doppio tamburo ricevitore che era in rapporto con un tamburo registratore del Marey. Il cilindro affumicato era messo in movimento da un motore elettrico e la velocità era tale che ogni centesimo di secondo comprendeva uno spazio di cm. 0,5, dimodochè se ne potevano facilmente stimare le frazioni. I numeri che qui riferisco esprimono una media di numerose determinazioni che davano singoli valori assai costanti.

« I resultati ottenuti dal dott. Libertini sono i seguenti:

1°. Il tempo riflesso dell'arto anteriore nel cane normale oscilla da 32,6 a 36,9 mm. di 1″.

2°. Per l'arto posteriore il tempo riflesso è minore, oscillando da 27,9 a 32 mm. di 1″.

« Un fatto analogo era già stato osservato da Novi e Grandis (1), che lavorarono sotto la direzione del prof. Luciani.

3°. L'estirpazione del lobo frontale sinistro porta ad una notevole diminuzione del processo, che dopo parecchi giorni dall'operazione raggiunge un valore che per l'arto anteriore oscilla da 23,8 a 26,1 mm. di 1″.

4°. L'estirpazione del lobo occipitale ha pure una influenza acceleratrice per il tempo riflesso, ma meno notevole che pel frontale; difatti dopo l'estirpazione dell'occipitale il tempo oscilla tra 27,4 e 31,3 mm. di 1″.

5°. La zona motrice non ha, si può dire, alcuna azione sul tempo riflesso, giacchè le minime differenze osservate possono essere attribuite a lesioni funzionali dei lobi vicini.

6°. L'asportazione del lobo frontale destro, consecutivamente a quella del sinistro, porta un acceleramento nel tempo riflesso, ma molto meno notevole di quello osservato in conseguenza della prima asportazione.

(1) Ivo Novi e V. Grandis, *Sul tempo di eccitamento latente per irritazione cerebrale e sulla durata dei riflessi in diverse condizioni sperimentali* (Rivista sperimentale di Freniatria e Medicina legale, vol. XIII, fasc. III, 1887).

7°. Gli arti posteriori risentono assai debolmente l'influenza delle lesioni corticali, infatti il tempo di reazione in questi oscilla, dopo l'ablazione:

α) per il lobo frontale da 28,7 a 30,4 mm. di 1″;

β) per il lobo occipitale da 27,6 a 30,1.

8°. Il lobo sinistro agisce indifferentemente sugli arti di entrambe le metà.

« A questi risultati ottenuti dal dott. Libertini posso aggiungerne altri che emergono da mie esperienze personali.

« Anzitutto devo confermare i fatti osservati dal dott. Libertini, coi quali i miei risultati corrispondono perfettamente.

« Dopo aver studiato gli effetti conseguenti alla demolizione della corteccia, ho voluto per contrapposto indagare quelli ottenuti dall' eccitamento di essa, e a questo proposito non ho soltanto studiata la durata del tempo di reazione, ma ho anche determinata graficamente l'ampiezza della reazione motrice. Lo stimolo della corteccia si faceva con una corrente indotta assai sensibile alla lingua, certo notevolmente più forte di quella che ordinariamente si adopera per la zona motrice. Infatti questo stimolo portato sulla regione motrice provocava delle forti convulsioni epilettoidi. Era necessaria una tale intensità di stimolo per dare i resultati che ora esporrò:

1°. Quando si ecciti il lobo prefrontale si osserva spesso, ma non sempre, una notevole depressione nell'altezza della curva miografica.

2°. Per quanto riguarda la durata della contrazione mi riserbo di fare delle ricerche ulteriori. Da quello che ho potuto vedere gli atti riflessi conseguenti allo stimolo dell'arto corrispondente, come fu sempre il caso, durano meno quando contemporaneamente si eccita la corteccia della regione prefrontale.

3°. Il tempo di reazione è quasi sempre notevolmente allungato quando lo stimolo si rivela efficace con la depressione della curva miografica, mentre è pressochè uguale al tempo normale e qualche volta minore di esso quando lo stimolo si rivela inefficace. In un caso, per esempio, il tempo normale era in media di 28,3 mm. di 1″, quello durante gli stimoli efficaci 86,2 mm. di 1″, quello durante gli stimoli inefficaci 23,7.

4°. La degressione della curva miografica ottenuta per via riflessa, dura più a lungo di quello che duri lo stimolo della corteccia; infatti uno stimolo di corrente indotta portato sul lobo prefrontale per la durata di 5″, provoca una depressione nell'attività riflessa, che dura circa 3′, dimostrando una vera ritenzione dell'eccitamento. È cioè soltanto dopo un tratto di tempo di circa 3′ che la reazione motrice ritorna di intensità normale. Questi fatti ci spiegano, mi sembra, il perchè spesso accada che le reazioni motrici presentano delle forti oscillazioni nella loro intensità e nel loro tempo latente; si tratta probabilmente di oscillazioni automatiche o riflesse della inibitorietà corticale.

5°. Quanto si è detto sinora riguarda l'arto anteriore del lato opposto a quello della lesione. Per l'arto anteriore dello stesso lato, i fatti sono ana-

loghi, ma meno intensi. Nel treno posteriore invece ho potuto osservare qualche rara volta una diminuizione nell'altezza della curva, ma mai un allungamento del tempo latente.

6°. L'eccitamento del lobo occipitale diede resultati assai variabili, che meritano un attento esame.

7°. Per quanto riguarda la zona motrice nulla ho potuto osservare che ricordasse quanto si vede in conseguenza dello stimolo dei lobi prefrontali, tanto più che adoperando correnti relativamente energiche, lo stimolo della zona motrice provocava delle convulsioni epilettoidi.

« Queste ricerche mi hanno dato occasione inoltre di fare osservazioni speciali sul comportarsi degli animali scerebrati (cani e scimmie), osservazioni che verranno esposte particolarmente nel lavoro che pubblicherò in proposito.

« Da queste ricerche emerge che la corteccia cerebrale esercita un'azione inibitrice tonica sul midollo spinale, per la quale gli atti riflessi di questo ultimo vengono ritardati, affievoliti ed accorciati, azione analoga a quella già da me osservata nell'*Emis Europaea* (1). Questa proprietà inibitrice non è uniformemente distribuita sulla corteccia cerebrale, chè anzi la troviamo predominante nel lobo frontale, molto minore nel lobo occipitale, quasi nulla nella regione parieto-temporale.

« Noi possiamo rappresentarci schematicamente questo potere inibitorio come una specie di vibrazione nervosa che, partendo dalla corteccia, vada man mano affievolendosi mentre si diffonde lungo il midollo spinale. Ed infatti si osserva come in condizioni normali il treno anteriore abbia un tempo riflesso più lungo del posteriore e come quest'ultimo, a differenza del primo, risenta appena l'influenza delle estirpazioni e delle stimolazioni corticali. La regione anteriore della corteccia reagisce agli stimoli ordinariamente aumentando la sua capacità inibitrice, la quale può presentare delle oscillazioni indipendentemente dagli stimoli esteriori. Questi poi mettono in evidenza le capacità ritentive della zona frontale del cervello.

« Per quanto si è detto, sorge ad evidenza il fatto che oltre ad una localizzazione di funzioni psico-sensorie e psico-motorie, si può per le esperienze surriferite ammettere una localizzazione di funzioni inibitorie. Queste poi acquistano, assai più di quel che avevano prima, un carattere di psichicità, quando si pensi che esse si riscontrano al massimo grado là dove alcuni localizzano le funzioni più elevate dell'intelligenza, in minor grado nella regione sensoriale, quasi nulle nella zona motrice ».

(1) Fano, *Recherches expérimentales sur un nouveau centre automatique dans le tractus bulbo-spinal*. Archives Italiennes de Biologie, tome III, 1883; Id., *Saggio sperimentale sul meccanismo dei movimenti volontari nella testuggine palustre*. Pubblicazione del R. Istituto di Studî superiori in Firenze, 1884; Id., *Sul nodo deambulatorio bulbare*. La Salute. Genova 1881; Id., e Lourie, *Contributo sperimentale alla psico-fisiologia dei lobi ottici nella testuggine palustre*. Rivista sperimentale di Freniatria e Medicina legale, anno XI, 1885.

Fisiologia. — *Il cervello ed il midollo spinale come centri di inibizione.* Nota preliminare del prof. Ruggero Oddi, presentata dal Socio Luciani [1].

« Da due anni, nel laboratorio da me diretto, si lavora assiduamente sui fenomeni inibitorî che si svolgono in determinate circostanze sia nei centri nervosi che nei nervi periferici. Per ora ci limiteremo a descrivere brevemente il metodo sperimentale di cui ci siamo serviti ed i fatti più salienti finora osservati nell' indagare la funzionalità inibitoria del cervello e del midollo spinale.

« Isolate le paia spinali del tratto lombo-sacrale, si cerca — saggiando con una debolissima corrente faradica, appena apprezzabile alla lingua — la radice anteriore, che eccitata provoca manifeste contrazioni del muscolo gastrocnemio (5ª lombare nel cane). Ciò fatto si isola il tendine del gastrocnemio e si mette in rapporto, a mezzo di un robusto filo, col tamburo del miografo di Marey per il cane. Il miografo, regolato debitamente, si collega, servendoci di un tubo di gomma a spesse pareti, col tamburo a leva che si fa scrivere sopra il cilindro affumicato rotante con una velocità di un giro ogni 4′ e 50″. S' introduce quindi la radice anteriore menzionata, isolata con ogni cautela dalla corrispondente posteriore, nell' eccitatore coperto del D'Arsonval in rapporto colla slitta del Dubois-Reymond. Un segnale Depretz è intercalato nel circuito e ci segna nel cilindro rotante il momento del passaggio della corrente e la durata della stimolazione. Un metronomo elettrico del Verdin, che batte il secondo, funziona da interruttore e permette di eccitare il nervo con scosse ritmiche ad intervalli sempre uguali.

« Così, facendo funzionare l' apparecchio ed avvicinando il rocchetto di induzione della slitta, riusciamo a determinare la corrente minima necessaria per ottenere la contrazione del gastrocnemio ben visibile sul cilindro rotante e possiamo fare scrivere quel numero di contrazioni che è necessario per avere un saggio del modo di reagire del nervo in queste condizioni (Vedi fig. 1ª.)

« Ciò fatto, per studiare l'azione che le diverse parti del sistema nervoso possono spiegare sull' attività del nervo in esperimento, è sufficiente eccitare dette parti per mezzo di un altro apparecchio ad induzione e registrare sul cilindro rotante con un altro segnale Depretz il momento in cui comincia e quello in cui termina la stimolazione.

[1] I primi risultati di queste ricerche furono comunicati alla R. Accademia Medica di Genova nella seduta ordinaria del 17 dicembre 1894.

« Come materiale di esperimento ci siamo serviti dei cani, delle scimmie, dei gatti e dei conigli. Abbiamo pure eseguito delle ricerche sugli animali

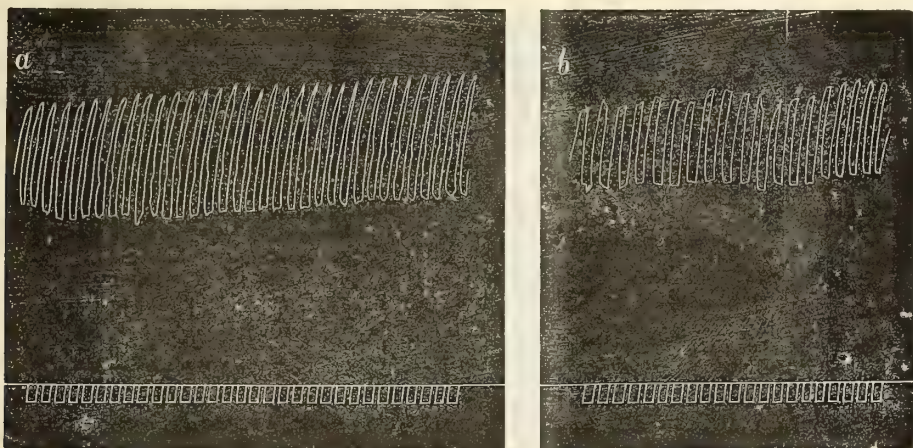



Fig. 1.

inferiori con un metodo sperimentale alquanto diverso e del quale ci occuperemo a suo tempo nel lavoro completo.

« In questa nota preventiva ci limitiamo a riportare in breve i risultati ottenuti nel cane coll'eccitazione delle zone prefrontali (aree mute od ineccitabili) del cervello e della superficie di taglio del midollo spinale a diverse altezze.

« È mestieri notare che per ottenere dei buoni risultati è necessario far lungamente riposare l' animale, dopo aver scoperto il midollo spinale nella regione lombo-sacrale o cervicale e dopo avere aperta una larga breccia nel cranio per porre a nudo un lobo frontale e molte volte tutti e due, come abbiamo spesso praticato.

« Come pure è mestieri usare molta diligenza per raggiungere il grado necessario di narcosi dell'animale. Noi morfinizzavamo leggermente i cani e poi li cloroformizzavamo in modo da non ottenere nè una narcosi troppo profonda, poichè in questo caso il sistema nervoso non risponde più agli stimoli, nè troppo superficiale, poichè allora l' animale sotto la stimolazione si desta e turba con violente scosse volontarie l' andamento dell' esperienza e facilmente scoppiano accessi epilettici che fanno perdere ogni risultato. È difficile dire esattamente le cautele da seguirsi per ottenere una buona narcosi: bisogna provare a lungo, come abbiamo fatto noi e dopo qualche insuccesso si riesce a regolarla abbastanza bene.

« Quando si eccita il cervello anteriore del lato opposto a quello della radice in esperimento, saggiando i diversi punti coll' eccitatore, si riesce sempre a trovare un' area non perfettamente limitabile nè costante, che modifica molto profondamente la grafica delle contrazioni ritmiche del gastro-

cnemio. Queste modificazioni accadono dopo un tempo di eccitamento latente variabile a seconda della intensità della corrente e delle condizioni dell' ani-

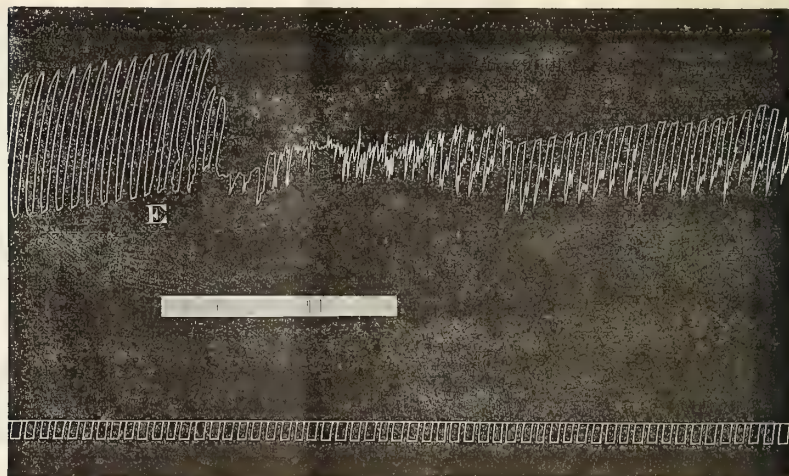



Fig. 2.

male, ma sempre abbastanza lungo. Le figure 2ª e 3ª, scelte tra i numerosi tracciati che abbiamo raccolto, mostrano in che consistono dette modificazioni.

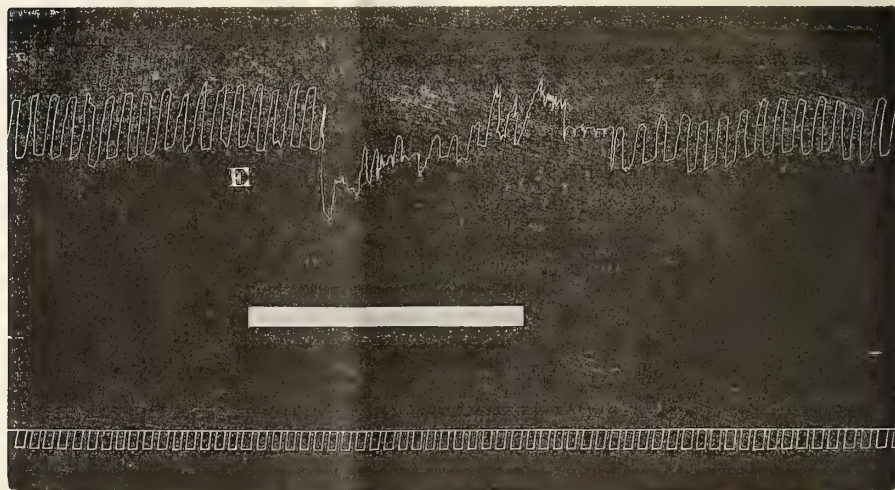



Fig. 3.

In esse si avvertono spiccati cangiamenti del tono muscolare, abbassamenti delle contrazioni ritmiche ed altri particolari visibili nei tracciati e che sarebbe lungo descrivere.

« Questi effetti si protraggono di solito qualche tempo dopo cessata l' applicazione dello stimolo elettrico sulla corteccia cerebrale e poi gradatamente, qualche volta anche d' un tratto, il tracciato grafico della radice riacquista i suoi caratteri primitivi.

« Sicchè la corteccia cerebrale della zona frontale del lato opposto esercita una spiccata influenza inibitrice sull' attività delle radici spinali del tratto lombo-sacrale eccitate ritmicamente nel modo già descritto.

« Abbiamo voluto anche vedere quanta parte prendesse alla produzione del fenomeno la corteccia grigia cerebrale, ripetendo l' esperimento sopra descritto dopo l'ablazione della corteccia stessa. Abbiamo potuto ripetutamente accertarci

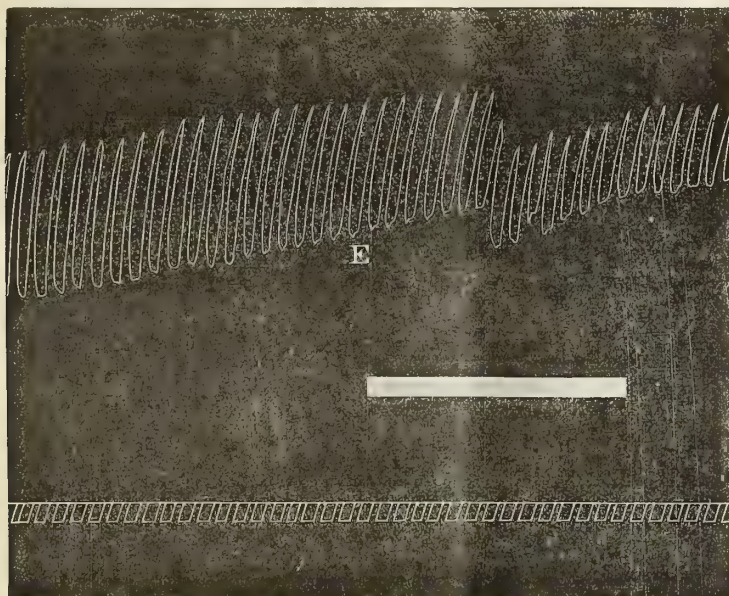



Fig. 4.

che il fatto continua sempre a manifestarsi, soltanto si notano certe differenze che si riferiscono specialmente al tempo di reazione latente ed alla intensità del fenomeno e delle quali ci occuperemo a suo tempo.

« Non abbiamo neppure trascurato di saggiare l'effetto della stimolazione delle zone posteriori della corteccia cerebrale e ci siamo convinti che, anche impiegando correnti molto forti, non si notano variazioni apprezzabili nel tracciato grafico del muscolo in esperimento.

« Un' altra serie di ricerche ha avuto per scopo di determinare quali sono le vie spinali per le quali passa questa influenza inibitrice cerebrale. Si recisero a tal uopo successivamente i diversi cordoni spinali, ripetendo la stimolazione della corteccia nel punto indicato per vedere se il fenomeno inibitorio scompariva o continuava a verificarsi. Queste ricerche

ci hanno presentato delle grandi difficoltà tecniche, che però siamo riusciti a superare. Per ora ci limiteremo a dire che il taglio dei cordoni posteriori e della sostanza grigia non influisce sulla produzione del fenomeno: l' inibizione continua a manifestarsi anche dopo il taglio dei cordoni laterali, purchè

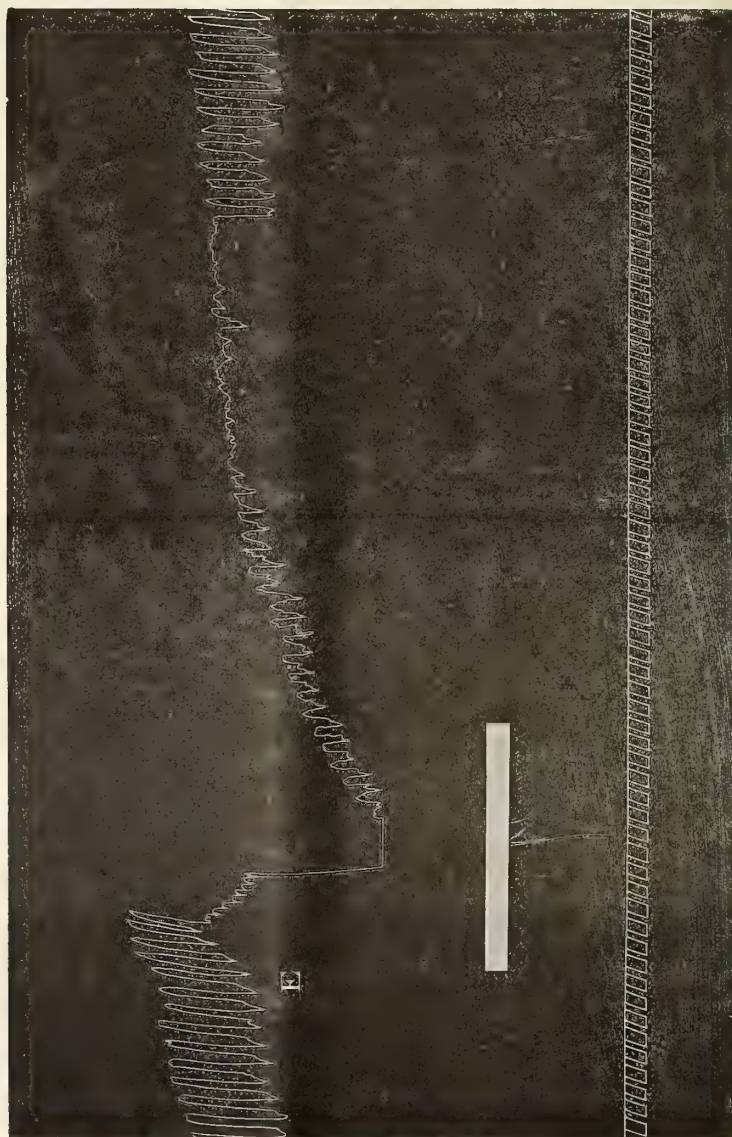



Fig. 5.

rimangano integri i cordoni anteriori. Così pure abbiamo notato che tentando il taglio primitivo dei cordoni anteriori, cosa molto difficile, purchè non si ledano i cordoni laterali, l' influenza del cervello continua a manifestarsi presso a poco in modo normale. A suo tempo metteremo meglio in evidenza questi

fatti discutendoli e confrontandoli colle recenti teorie anatomiche sulla distribuzione delle vie cerebrali e spinali e sui loro rapporti; come pure riporteremo i più caratteristici tracciati grafici presi in diverse condizioni sperimentali.

« Intanto ci basta di affermare che le nostre ricerche dimostrano, come del resto era logico supporre, che l' inibizione cerebrale segue la via dei cordoni laterali ed anteriori con predilezione per questi ultimi.

« Non abbiamo tralasciato di saggiare con l' eccitatore anche le zone prefrontali dello stesso lato, e ci siamo convinti che esse pure dimostrano un' azione inibitoria ben distinta, come si può vedere nella figura 4ª.

« Quindi il cervello può inibire il midollo ed i nervi periferici, non solo in via crociata, ma anche in via diretta.

« Abbiamo osservato un altro fatto che a noi sembra del massimo interesse, specialmente dal punto di vista della patologia. Noi abbiamo potuto constatare ripetutamente che si passa colla massima facilità e rapidità (specialmente usando correnti un po' forti) da una spiccata inibizione ad un accesso epilettico dei più classici; che dopo l' accesso epilettico le zone inibitorie perdono in gran parte od in totalità la loro azione inibitrice; infine, che in quei cani che dimostrano una speciale disposizione per l' epilessia, è molto più difficile ottenere dei fenomeni inibitori per l' eccitazione del cervello, perchè in questi all' applicazione dello stimolo elettrico consegue quasi sempre lo sviluppo di un accesso epilettico.

« Sempre collo stesso metodo sperimentale, abbiamo tentato di saggiare la funzionalità dei gangli della base, del cervelletto e del bulbo, dal punto di vista delle azioni inibitorie o di arresto. Non possiamo riferire i risultati di queste nostre ricerche, che sono in numero troppo scarso ed incomplete, tanto più che abbiamo intrapreso degli studî comparativi sui diversi animali dai meno sviluppati ai più evoluti, studî che fino da ora ci promettono di riuscire assai interessanti.

« Accenneremo invece brevemente ad una lunga serie di esperienze, eseguite allo scopo di studiare l'azione inibitrice del midollo spinale in rapporto con quella del cervello testè accennata. La tecnica sperimentale è la stessa, soltanto in luogo di stimolare le zone frontali si eccita la superficie di taglio periferica del midollo spinale, sezionata o fra l' ultima vertebra dorsale e la prima lombare, o nella regione cervicale al disotto del bulbo, praticando in questo secondo caso la respirazione artificiale.

« Abbiamo sempre ottenuto una distinta azione di arresto dell'attività della radice spinale in esperimento. I caratteri di questa azione inibitrice sono i seguenti: dopo un tempo di eccitamento latente (che è molto più breve per la regione dorsale che per la cervicale, ed in generale molto più rapido che per il cervello) le curve delle contrazioni subiscono tali alterazioni di tono e di altezza, che il più delle volte scompaiono del tutto, riducendosi il tracciato in proporzioni minime, come si può vedere nella figura 5ª.

« Altre volte la cessazione dell' eccitamento non è preceduta da una variazione di tono. Cessata la stimolazione, l' effetto inibitorio non scompare così rapidamente, come abbiamo detto avvenire per il cervello, ma perdura alquanto. Spesso le curve vanno lentamente sollevandosi dall'ascissa fino a raggiungere l' altezza primitiva; altre volte quest' altezza non riescono più a raggiungerla; spesso è mestieri aumentare di molto la corrente se vogliamo ottenere una curva visibile e qualche rara volta, anche con una forte corrente, non riusciamo ad ottenere nulla e dobbiamo attendere qualche tempo prima che l'effetto dell'azione inibitrice provocata sia scomparso. Alcuni di questi fenomeni si possono vedere nelle figure 6ª e 7ª.

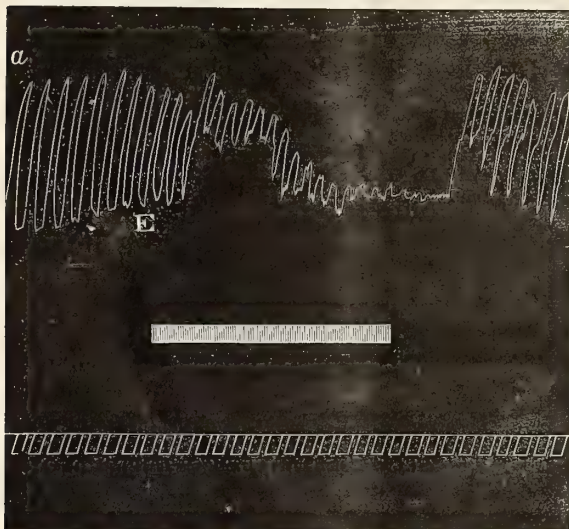



Fig. 6.

« Rimanendo la radice in esperimento sempre la stessa (5ª lombare nel cane) possiamo dire che i fatti sopra riferiti sono molto più manifesti per la stimolazione del midollo lombare che del cervicale. L' inibizione spinale, quindi, è molto più rapida a manifestarsi e molto più intensa e duratura della inibizione cerebrale. Ciò è splendidamente dimostrato da una bella serie di ricerche eseguite dal mio aiuto dottor Polimanti, dalla quale risulta che l'azione inibitoria che le radici spinali posteriori spiegano sulle anteriori tanto in via ascendente che discendente, dallo stesso lato e dal lato opposto, nella stessa regione ed a distanza, è molto più intensa e

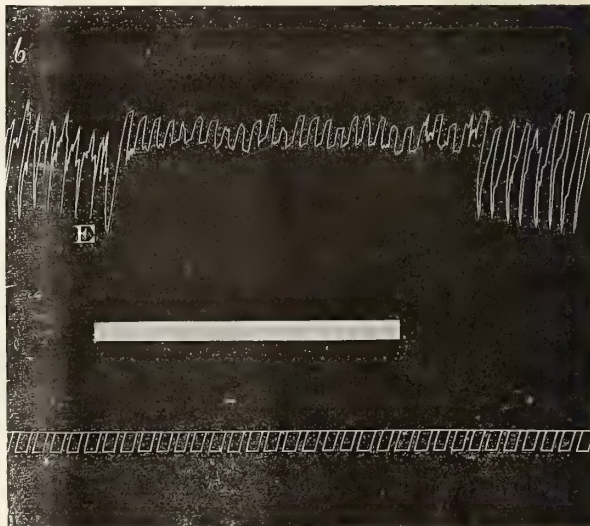



Fig. 7.

duratura a midollo tagliato che lasciando intatti i rapporti col cervello. Il che parrebbe significare che il cervello possiede anche un'azione regolatrice dell' attività inibitoria spinale.

« Questi fenomeni, che abbiamo brevemente accennato, pongono in evidenza, se non erriamo, l' eccitabilità di parti del sistema nervoso (segmento anteriore del cervello, midollo) ritenute fin qui ineccitabili agli stimoli fisici diretti, perchè il loro eccitamento non produce effetti dinamogeni ma inibitori ».

P. B.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia prima del 6 ottobre 1895.

Fisica. — *Sul fenomeno di Cagniard-Latour come indizio di stato critico.* Nota del dott. Giulio Zambiasi [1], presentata dal Socio Blaserna.

« La presente Nota è una risposta parziale al secondo quesito propostomi l'anno scorso; cioè: Quali sono gli indizî di stato critico d'una data quantità d'un corpo, chiuso in determinato volume. (Rend. della R. Accad. dei Lincei s. 5ª, vol. III, p. 184-190). La risposta generale esigerebbe una critica discussione dei metodi finora usati; ma intanto mi limito al fenomeno di Cagniard-Latour della sparizione della superficie di separazione d'un liquido dal suo vapore saturo; perchè su di esso s'era fondata la maggior parte delle misure degli elementi critici, ed ora si vuole escludere come fenomeno affatto distinto dal punto critico, con temperatura propria diversa dalla critica.

« I lavori recenti ai quali m'appello più di frequente sono i seguenti:

A. Battelli, *Sullo stato della materia nel punto critico.* (Atti del R. I. Veneto, s. 7ª, t. III, p. 1616, a. 1892 e s. 6ª, t. IV, p. 685).

B. Galitzine, *Ueber den Zustand der Materie in der Nähe des kritischen Punktes* (Ann. der Ph. und Ch. Band. 50, p. 521, 1893).

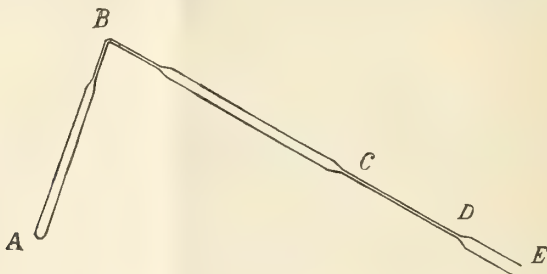
P. de Heen, *La Chaleur* (Liège 1894).

W. Ramsay, *Ueber den kritischen Zustand* (Zeitschr. der Ph. Ch. XIV Band, 3 Heft., p. 486, 1894).

« Per dare peso ai risultati e alle conclusioni devo descrivere il modo tenuto per riprodurre le esperienze; ciò è tanto più necessario, perchè il sig. Ramsay sembra rigettare in fascio le esperienze recenti, perchè, secondo lui,

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto Fisico della R. Università di Roma.

non furono condotte bene, sia per la purezza chimica delle sostanze, sia per la omogeneità e costanza della temperatura (1).

« Premetteva la lavatura e il rasciugamento della canna di vetro alla costruzione del tubo, perchè può benissimo chiudersi al cannello senza che vi penetrino i prodotti della combustione.

« Chiuso in A il tubo, tirava in B (AB lunghezza scelta di 18 cm.) un tratto capillare a pareti robuste, piegandolo ad angolo, e in C un tratto rettilineo e lungo. Ne estraeva l'aria colla macchina pneumatica (2), interposti tubi essicatori e lavatori per una eventuale aspirazione d'aria e d'umidità, contemporaneamente riscaldava il tubo da A in D, quindi chiudeva in D al cannello lasciandolo poi raffreddare. Vi introduceva l'etere purissimo spezzando la punta D immersa in esso, e dopo averlo risciacquato più volte collo stesso, tenendolo sempre a temperatura superiore a quella d'ebollizione dell'etere affinchè la pressione atmosferica non superasse la tensione interna, riempiva tutto AB e parte di BC come prima immergendo la punta D; un piccolo abbassamento di temperatura bastava a far penetrare l'etere fino in A celeramente come nel vuoto. Faceva bollire tutto l'etere per espellere quello che sovrabbondava, e insieme le traccie d'aria in esso disciolta, chiudeva tosto in C conservando pieno AB; avvertendo che non prendesse fuoco il vapore d'etere in D, che la tensione interna non rompesse il tubo nel punto riscaldato, che non venisse aspirata dell'aria nel tubo; il che otteneva mantenendo tutto alla temperatura d'ebollizione dell'etere e tirando tosto il tubo capillare.

(1) Ramsay fece uso dell'apparecchio del tubo ad O munito del regolatore dei volumi già da me proposto nel gennaio 1893 (Rend. della R. Accad. dei Lincei, vol. II, s. 5ª, p. 27). Egli lo chiama apparecchio di pressione impropriamente (Druck apparat) sapendosi che la pressione del vapore saturo sul liquido dipende solo dalla temperatura, cosicchè una compressione ha per effetto diminuzione di volume, non aumento di tensione (Sydn. Tomis. Phil. Mag. 38, p. 569).

(2) Ramsay usando la pompa ad acqua per estrarre l'aria dai tubi, lascia dubitare del loro perfetto asciugamento, sia per la facile propagazione dei vapori nel vuoto, sia per la tendenza igroscopica della superficie tersa del vetro.

« Per avere etere più puro [1] ricacciava nel tubo BC tutto il liquido, e ne riempiva AB per distillazione immergendo il primo in bagno caldo il secondo in bagno freddo.

« Per regolarne la quantità invertiva i bagni e coll'evaporazione ricacciava il superfluo di AB in BC, insieme cogli aeriformi che per avventura potevano rimanere, e tosto chiudeva al cannello in B il tubo di prova AB. Riesce bene la chiusura, se il bagno di AB è quasi alla temperatura di 38°, e quello di BC una diecina di gradi più freddo; e, se il tubo capillare è ben preparato, può farsi assai prontamente, sicchè e per la breve durata di riscaldamento del vetro fuso e per la esiguità della superficie calda in contatto del vapore è certo trascurabile la quantità alterata.

« Sull'uso del mercurio nell'apparecchio osservo che dopo averlo ben ripulito, lo lavava nell'etere di prova per vedere se aveva luogo l'ossidazione, lo faceva bollire per asciugarlo ed espellerne l'aria, poi lo introduceva per aspirazione pel tubo capillare, e finalmente lo riscaldava con tutto il tubo. Ramsay non parla dell'eliminazione dell'aria dal mercurio; e inoltre per adattare il tubo al regolatore dei volumi lo riapriva dopo averlo preparato e riempito d'etere. Or bene, per tacere dello spazio nocivo impossibile ad evitarsi nel punto d'adattamento, chi sa che la tensione interna del vapore d'etere è alla temperatura ordinaria assai inferiore alla pressione atmosferica, capirà che è ben difficile che non venga aspirata dell'aria.

« Pel riscaldamento usai il metodo veramente classico di Ramsay, dei vapori di chinolina frazionata bollente ad una data pressione. Ha il pregio di dare una temperatura costante e variabile a piacimento entro certi limiti, e misurabile per mezzo delle pressioni; ma esige grandi precauzioni per la grande facilità ad essere perturbato l'equilibrio della temperatura. Per le temperature più basse usai il bagno ad olio ben agitato, e trovai ben comparabili i numeri riportati dai due metodi.

« Venendo ora alle esperienze, siccome il fenomeno di Cagniard-Latour s'aggira intorno alla superficie di separazione del liquido dal suo vapore saturo per cui è detto semplicemente *sparizione e apparizione del menisco*, così per chiarezza riassumo tutto sotto i seguenti titoli: *a*) Trasformazioni del menisco, *b*) il menisco e la temperatura, *c*) posizione del menisco, *d*) relazione di questi fenomeni colla quantità della sostanza, colla densità e volume critici.

a) « *Trasformazioni del menisco.* Al crescere della temperatura diminuisce la curvatura del menisco, e in vicinanza alla sparizione diviene un disco a contorni nitidi e superficie brillante per riflessione di luce sulle due faccie, e veduto col canocchiale del catetometro pare una retta brillante. A certa temperatura il menisco cessa di più riflettere la luce; veduto tra-

[1] Usai etere preparato dall'illustre Pictet.

sversalmente appare in suo luogo una porzione di tubo opaca, ivi non si riconosce nè puro liquido nè puro vapore, il raggio luminoso non si vede più spezzato ma incurvato verso l'asse del tubo, sicchè le sue generatrici danno la parvenza d'una strozzatura. Diottricamente quindi si riconosce un fenomeno di rifrazione complessa d'un raggio, che attraversa strati con densità variabile con continuità.

« Questo è propriamente il fenomeno di sparizione del menisco, di notevole importanza per la teoria della capillarità e delle tensioni superficiali dei liquidi; e non minore nella termodinamica, perchè a questo punto cessando la *omogeneità*, le equazioni dei corpi perdono la loro semplicità, supponendo esse un sistema di due stati omogenei con due densità e volumi determinati; tuttavia incomincia un fatto importante, cioè la *continuità nella densità*, che per un tratto del tubo diviene variabile ad una data temperatura (Rend. della R. Acc. dei Lincei s. 5ª, v. II, p. 25). Al crescere della temperatura la sezione del tubo diviene sempre più trasparente, finchè non si scorge più distinzione tra le diverse sezioni del tubo, sia veduto da diversi punti dello spazio, sia contro uno schermo o contro un pelo teso obliquamente (Battelli). Più determinato è l'indizio desunto dalla costanza dell'indice di rifrazione. Questo è detto impropriamente sparizione del menisco; è piuttosto un segno d'apparente omogeneità nel tubo.

« Il fenomeno inverso non coincide: raffreddando, tutto il tubo assume una colorazione azzurra, dovuta a polarizzazione della luce (Ramsay) che va diminuendo e si limita a sezione del tubo dove appare il menisco come disco splendente. È da notarsi che queste fasi del fenomeno sono così distinte, che si possono riprodurre separatamente; p. e. fare sparire e apparire il menisco senza la sparizione delle strozzature; fare apparire la colorazione e poi scomparire senza traccia di menisco, sia variando la temperatura, sia variando il volume, com'io notai più volte, anzi le apparizioni e sparizioni del menisco si hanno più decisamente e ripetutamente nel secondo modo.

« Gli altri fenomeni secondarî ma notevoli che si possono osservare in queste esperienze, si devono certamente o a disequilibrio o a variazione brusca di temperatura e quindi di pressione: p. e. *le strie* o moto analogo a quello di due liquidi in dissoluzione che si osserva nel vapore anche ad alte temperature; la *nebula* locale che precede la apparizione del menisco; le *bollicine uscenti dal* liquido e la *pioggia* che segue la formazione del menisco.

« Le mie osservazioni sono confermate dalle esperienze di Battelli appositamente istituite con cadute di temperatura, e dalla prova di Ramsay col tubo ad O; Galitzine pure osserva che la nebula è indizio di temperatura ineguale. Col metodo di Ramsay io otteneva la nebula quando in luogo di regolare la temperatura colla pressione, ne levava la fiamma. Ciò posto se questi fenomeni sono utili per concepire ipotesi più o meno plausibili sulla costituzione della materia, devono però escludersi quando si suol cercare la legge del fenomeno regolare.

b) « *Il menisco e la temperatura.* Io, nelle mie prime esperienze, rivolsi l'attenzione alla prima sparizione del menisco e alla sua temperatura, per cercare se colla continuità così ottenuta poteva aver luogo anche la completa omogeneità, che sarebbe lo stato critico. Segnerò con t_m questa temperatura di sparizione del menisco. Nelle recenti esperienze invece si cerca la temperatura di sparizione delle ultime traccie di separazione dei due stati ossia di apparente omogeneità.

« Questa è una causa di divergenza nelle misure di diversi esperimentatori; presa la media delle temperature di sparizione del menisco e di omogeneità, ottengo una differenza: $t'_c - t_m = 1°,6$; la massima differenza supera 3°. Resta dunque senza dubbio che: $t_m < t'_c$. La differenza tra la temperatura t_m e quella di sparizione delle strie supera 10°.

« Galitzine segna con t_c la temperatura d'apparizione del vero menisco e conchiude che:

$t_c < t'_c$, trovando che la massima differenza è $t'_c - t_c = 1°$. Io, nelle mie esperienze, trovo per media delle temperature d'apparizione:

$t_c = 191°,9$, media di $t_m = 192,82$ medie di $t'_c = 193,85$

quindi è senza dubbio $t_c < t'_c$. Tuttavia anche nelle recenti esperienze trovo più casi in cui $t_c \geqq t_m$ e molto più se, come io feci nelle prime, si considera la temperatura d'apparizione della colorazione.

« Più importante è sapere la relazione di queste temperature colla critica. Ora t'_c non ha alcuna delle proprietà indicate per t_m, ma ha il pregio d'accostarsi più alla temperatura critica.

« Tuttavia più esperienze dimostrano che ancora non è raggiunta la distribuzione omogenea della materia nel tubo. Battelli, Galitzine ed Heen dànno gran peso alla apparizione delle strie assai al di sopra della temperatura critica segno di inomogeneità. Pure Ramsay afferma che con t'_c non s'è ancor raggiunta la critica e in conferma s'appella alle curve delle densità.

« Ammessa la temperatura 194°,7 come critica dell'etere (Ramsay), s'avrebbe la differenza di 0°,85'; la minima differenza sarebbe 0°,5'. Trovo più esempî di temperature di sparizione totale uguali e anche maggiori della critica data da Ramsay.

« Risulta quindi dalle mie esperienze, che in determinate condizioni si possa considerare come critica la temperatura di omogeneità, senza errore che superi quello di osservazione, ciò che sarà confermato in seguito.

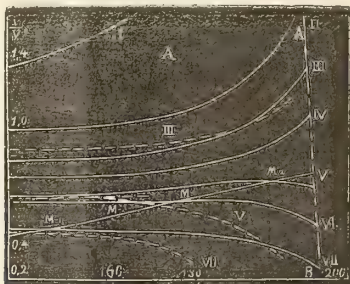
« Resta a decidere se la temperatura di sparizione dipenda o no dalla quantità della sostanza inchiusa in dato tubo; e che si riconosce dal rapporto $v : v'$ dei volumi del liquido e del vapore.

« Ecco i risultati di esperienze comparative nuovamente fatte con coppie di tubi di Natterer riscaldati col metodo di Ramsay.

$\frac{v}{v'} =$	0,53	0,52	0,51	0,49	0,47	0,46	0,425	0,42	0,41
$t_m =$	193,1	192,9	192,9	193	192,7	192,5	192,7	192,6	193,1
$t'_c =$	194,2	194	193,85	194,04	193,95	194,1	193,82	193,2	193,97

« Di qui non è possibile dedurre la legge delle sparizioni. Le oscillazioni t'_c da 194°,2-193°,2 sono più ampie di quelle di t_m da 192°,5-193°,1 ma escluso il rapporto 0,42 dove probabilmente vi fu errore di osservazione, la oscillazione è 194°,2-193°,82; risultato che coincide quasi con quello di Heen.

« Tuttavia, concedendo che la esperienza non ne abbia formulata la legge, non posso conchiudere con Galitzine la indipendenza della temperatura di sparizione e meno ancora della critica. L'ordine delle sparizioni nelle prove di resistenza dei tubi fatte con temperatura sempre crescente, confermò costantemente la regola da me enunciata che la temperatura di sparizione cresce col diminuire del rapporto. Lo stesso ordine osservai mantenendo fissa una temperatura superiore a quella di sparizione, finchè sparivano i menischi nelle coppie dei tubi; anzi riuscii a fare scomparire e ricomparire il menisco in un tubo, senza che nell'altro si trasformasse punto. Nè saprei spiegare come ad una temperatura costante si possa ottenere lo stesso effetto, variando il volume col regolatore.

c) « *Posizione del menisco.* L'andamento generale fu dato da me (Rend. della R. Acc. dei Lincei vol. III, s. 5, p. 184) nella tabella dei rapporti $\frac{v}{v'}$ ed

è riassunto nel diagramma seguente (¹). Per completarlo ho costruito la curva dei massimi ivi accennata $M_1 M_2$.

« Nella tabella porto i valori massimi di $\frac{v}{v'}$, le temperature corrispondenti, e segno i tubi coi rapporti iniziali :

rapp. iniz.	0,26	0,33	0,378	0,40	0,404	0,41	0,42	0,43	0,46	0,462	0,465	0,4[illegible]6	0,52
temp. . .	107°	122°	141°,3	144°	156°	160°	163°	164°	171°	176,5	178°	183°	193°
$\frac{v}{v'}$ massimo.	0,35	0,38	0,44	0,45	0,48	0,50	0,507	0,52	0,576	0,59	0,6	0,641	0,758

(¹) Galitzine usa il rapporto $\frac{v'}{v} = a$ del volume del liquido al volume totale del tubo; si passa facilmente al mio colla relazione: $\frac{v}{v'} = \frac{a}{t - a}$.

« Il massimo del rapporto cresce colla temperatura e il suo maggior valore coincide colla sparizione per un rapporto, che segna il limite tra quelli, che ammettono massimo e quelli che non l'ammettono.

« Dalla tabella si ha il valore 0,758 alla sparizione del menisco, 0,78 alla temperatura di omogeneità; e vi corrisponde il valore iniziale da 0,50-0,51. Osservo che la quasi coincidenza col valore limite 0,8 trovato da Amagat per l'acido carbonico, fa pensare ad una possibile coincidenza della curva dei massimi, sicchè la sua forma sia indipendente dalla natura della sostanza.

« La posizione del menisco è adoperata da Heen come indizio di temperatura critica, considerando egli come unico caso possibile di eguaglianza delle due densità quello in cui il menisco scompare all'estremità superiore del tubo, cioè: $v : v' = \infty$ che risponde all'iniziale 0,89.

« Altri casi singolari sono due; cioè l'*altro limite*: $v : v' = 0$ il cui valore iniziale è 0,39 e significa sparizione all'estremità inferiore, e il massimo $v : v' = 0,758$, iniziale 0,50.

« Dei tre valori il terzo fu adoperato più o meno approssimativamente nelle esperienze da Cagniard-Latour fino a Pictet, che lo assume come dato iniziale nel suo metodo di riconoscere la purezza chimica delle sostanze dalla temperatura di sparizione del menisco, che chiama col nome usato di critica. Questo stesso rapporto risponde a quello della curva regolare delle tensioni dei vapori saturi; e dà il maggiore raccordamento alle curve della densità; esso ha un andamento che è sensibilmente proporzionale alla temperatura.

d) « *Relazione di questi fenomeni tra di loro.* La posizione del menisco ad una data temperatura dipende unicamente dalla quantità della sostanza inchiusa nel tubo. Le oscillazioni di posizione si devono a variazione di temperatura, e sono indizio di irregolare procedimento. Questo fatto si presta alla determinazione del volume critico e della densità, adottando un rapporto determinato. Ciò è tanto più necessario, perchè ammessa con Galitzine e Ramsay la indipendenza della temperatura di sparizione dalla massa, gli stati di sparizione sarebbero rappresentati graficamente da un tratto di un' isoterma d'Andrews. Ma non può essere un tratto rettilineo, cessando la pressione d'essere indipendente come risulta dalle esperienze di Cailletet e Collardeen. Resta quindi il solo volume variabile indipendente, il che se può ammettersi per un fenomeno di capillarità, non lo si può certo ammettere pel punto critico, dove il volume per grammo di sostanza varierebbe oltre i limiti 3,59 e 5,04. Il rapporto da me scelto darebbe per volume critico il valore approssimato di $v_c = 4,2$.

« Resta finalmente la questione della densitá critica dalla quale dipende la decisione del problema che mi sono proposto. Heen rivolge le sue argomentazioni su di un fatto, che egli ritiene dimostrato; cioè che *ad una temperatura determinata risponde una infinità di vapori saturi aventi densità differenti.* Galitzine pure dalle proprie esperienze conchiude che le due

densità in vicinanza del punto critico non sono costanti, e che non sono determinate soltanto dalla loro temperatura; e quindi che riesce difficile la definizione di temperatura critica dedotta dall'eguaglianza delle densità.

« Orbene, nella Nota dell'anno scorso ho fatto una critica del metodo di calcolare le densità per mezzo dei volumi, alla quale non s'è ancora risposto. Devo inoltre soggiungere che le densità si devono misurare sotto la pressione del proprio *vapore saturo;* ciò esige una perfetta omogeneità di riscaldamento, perchè una piccola caduta di temperatura in un punto qualunque della massa del vapore importa una diminuzione di tensione, e quindi un aumento del volume del liquido dilatabilissimo in vicinanza dello stato critico. Effetto simile si ha operando ad una data temperatura col regolatore dei volumi, cosicchè la densità può apparire variabile. Inoltre si può obiettare a Heen e a Galitzine che la porzione di liquido separata dalla colonnina di mercurio non è sotto la pressione *immediata* del suo vapore, epperciò soggetta a soprariscaldarsi. Anche nell'esperienza del tubo ad U si ha l'inconveniente, che i due tubi non sono in eguali condizioni di pressione per causa del grande dislivello nel mercurio. Tutte queste cause fanno supporre che venissero confrontate tra di loro le densità di vapori non saturi, con quelle di vapori sovrasaturi, e quindi attribuite a torto a vapori saturi richiedendo certo tempo il sistema perturbato a riprendere l'andamento regolare.

« Per verificare e decidere feci l'esperienza del tubo ad O munito di regolatore e ciò che equivale con diverse quantità di liquido, per vedere l'andamento della differenza delle due densità, che è sensibilmente proporzionale al dislivello del mercurio, il quale dipende unicamente da esse.

« Nella tavola seguente il dislivello è dato in centesimi di millimetro riferiti ad un millimetro di etere.

$v:v' = 0{,}28$		$v:v' = 0{,}36$		$v:v' = 0{,}42$		$v:v' = 0{,}54$		$v:v' = 0{,}57$	
temp.	disl.	temp.	disl.	temp.	disl.	temp.	disl.	temp.	disl.
147°	3,95	125°	3,9	126°	4,5	143°	3,35	132°	3,57
165°	3,3	132°	3,7	145°	3,93	166°	2,7	153°,3	3,07
171°	3,0	156°	3,04	160°	3,48	177°	2,2	163°	2,9
178°,5	2,7	175°	2,5	172°	2,91	185°	1,9	186°	2,07
185°,5	2,2	188°	1,7	182°	2,5	190°	1,4	189°	1,65
191°,8	spar.	193°,9	1,08	187°	2,2	194°,5	1,0	193°	1,4
192°,6	livello			190°	2,0				
				194°	1,10				

« Dalla tabella risulta che le curve riescono sensibilmente parallele e assai vicine. Questo fatto proverebbe che le densità dei vapori saturi dipen-

dono dalla temperatura e dalla quantità del liquido inchiusa in dato volume. Sotto questo aspetto dunque si ha una conferma delle conclusioni di Heen e di Galitzine. Ma dobbiamo ben guardarci dal dire, che in uno stesso tubo colla stessa quantità di etere si possano avere più densità dei vapori saturi, come potrebbe supporsi al leggere i loro scritti. Inoltre i miei numeri lasciano intravvedere, che l'eguaglianza delle densità alla sparizione s'avveri tanto più, quanto è più piccola la quantità del liquido, ciò che è contrario alle esperienze di Heen.

« Finalmente il livello segno d'omogeneità si ottiene a temperatura alquanto superiore a quello di sparizione, il che conferma che questa non è indizio sicuro di omogeneità.

« Conclusioni:

a) In determinate condizioni può usarsi il fenomeno della totale sparizione per indizio di temperatura critica; l'errore che si commette, non supera i limiti degli errori d'osservazione.

b) L'uso del rapporto $v : v'$ come dato iniziale è buon criterio per la determinazione del volume critico.

c) Non è dimostrata la indipendenza della temperatura di sparizione (e molto meno della critica) dalla quantità della sostanza inchiusa nel tubo di prova.

d) Non è dimostrato, che le densità dei vapori saturi ammettano massimi e minimi; sicchè debba escludersi la definizione di stato critico dedotta dall'eguaglianza delle due densità.

e) Le divergenze tra gli sperimentatori intorno alle temperature di sparizione e apparizione sono apparenti, sono dovute ad equivoci inutili ».

Fisica. — *Coefficiente di diffusione del cloruro di sodio a diverse concentrazioni* [1]. Nota del dott. L. MARINI, presentata dal Socio BLASERNA.

« I metodi usati per la determinazione del coefficiente di diffusione si possono distinguere in metodi fisici e metodi chimici, secondo che la concentrazione delle soluzioni viene o misurata direttamente con analisi chimiche, o dedotta da costanti fisiche. Le costanti fisiche di cui si è fatto uso in tale studio sono state: forza elettromotrice (Weber), rotazione del piano di polarizzazione (Hoppe Seyler e Voit), [1] indice di rifrazione (Simmler e Wild, Johannisjanz). Già nel 1878 Stefan aveva fatto notare nei metodi ottici una causa gravissima di errore: l'incurvamento che subisce un raggio di luce nell'attraversare gli strati di diffusione. Su tale fenomeno appunto è fondato il metodo ideato dal prof. Wiener [2].

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto fisico della R. Università di Roma.
[2] Wiedemann, Ann., vol. 49, 1893.

« Questo metodo offre dei vantaggi anche sui metodi chimici. Con esso si possono eseguire in breve tempo parecchie misure durante il diffondersi di una stessa soluzione, senza essere obbligati ad interromperla. Nei metodi chimici le misure si eseguiscono estraendo le soluzioni a strati; il che, per quanta precauzione si usi, produce sempre un poco di mescolamento tra strato e strato: ciò non ha affatto luogo in questo metodo nel quale si eseguiscono le misure senza toccare il liquido di diffusione. In tutte queste misure sarebbe importantissimo conoscere il vero momento in cui comincia la diffusione; ma il Wiener ha calcolato che anche nelle sue accuratissime esperienze il teoretico punto zero del tempo precede di un buon quarto d'ora il principio del versamento della soluzione. In questo metodo si può invece prescindere benissimo da questo punto iniziale, potendosi calcolare il coefficiente per mezzo di differenze di tempo, tra due misure qualsiasi nel corso della diffusione di una stessa soluzione.

« Essendomi io proposto uno studio sulla legge della variabilità del coefficiente di diffusione con la concentrazione, volli adottare questo metodo che presenta sugli altri così notevoli vantaggi.

« Le esperienze da me eseguite sino ad ora non possono avere grande importanza, perchè ancora in numero troppo piccolo non mi hanno permesso di poter formulare una legge sicura su questa variazione; ma avendo intraveduto già sul cloruro di sodio un andamento singolare per soluzioni abbastanza diluite, mi sono affrettato a renderlo noto.

« Benchè il metodo del prof. Wiener a prima vista possa sembrare molto semplice e di facile applicazione, richiede tuttavia parecchie precauzioni per dare dei buoni risultati. Il Wiener stesso sulla fine della sua Memoria (1) consiglia di porre gran cura che le faccie del vaso di diffusione siano piane e parallele, e che le deviazioni delle curve derivate dalla retta non deviata siano misurate per mezzo di una lente con reticolo che si collochi sulla curva di diffusione. Avendo perciò trovato non abbastanza buono un vaso fatto venire dalla casa Leybold (quella stessa che aveva fornito i vasi di diffusione per l'esperienze del Wiener), pensai di costruirne uno io stesso con le faccie maggiori formate da due lastre di cristallo, accuratamente scelte in una fabbrica di vetri qui in Roma, e le rimanenti formate da un pezzo di caucciù tagliato a forma di contorno di un rettangolo senza il lato superiore. Lo spessore interno di questo vaso nelle esperienze a soluzioni più concentrate fu di cm. 1,435, in quelle a soluzioni più diluite cm. 1,891. Le lastre di vetro furono strette contro il caucciù per mezzo di morsette di ottone innanzi ad uno spettrometro, sino a che non si ebbe più deviazione nell'immagine di una fenditura luminosa osservata attraverso il vaso pieno di acqua. Per la misura delle deviazioni ho preferito la macchina a dividere al catetometro, perchè la mac-

(1) Wiener, loc. cit., pag. 144.

china a dividere garantisce meglio che, passando nelle successive posizioni della linea non deviata alle singole curve durante il movimento del microscopio per mezzo della vite micrometrica, si cammini sempre sulla stessa ordinata. La macchina a dividere da me usata dava il 500mo di mm. e permetteva la lettura anche del 1000mo ad occhio. Per determinare la direzione della verticale sulla lastra fotografica ove si imprimono le curve di diffusione, affinchè la lastra medesima fosse collocata sul piano della macchina a dividere con tale direzione parallela a quella del movimento del microscopio, tendeva sulla faccia anteriore del vaso di diffusione un filo di seta che intercettava i raggi luminosi sempre nell'istesso punto; e in tal modo sulle diverse curve e sulla linea non derivata si trovano dei sottili tratti di interruzione che dànno la verticale dell'esperienza. Per disporre sì il vaso di diffusione che lo chassis, contenente la lastra fotografica, esattamente verticali e normali al piano dei raggi luminosi, avevo costruito appositi sostegni che mi permettevano far eseguire ai medesimi rotazioni attorno ad un asse orizzontale e ad un asse verticale. Per ottenere infine un accurato versamento della soluzione, prima riempivo il vaso per metà di acqua distillata, quindi versavo la soluzione mediante una pipetta formata da un imbutino in comunicazione per mezzo di un rubinetto con un tubo capillare la cui estremità inferiore pescava in uno straterello di mercurio posto sul fondo del vaso. La pipetta era collocata ad un fianco del vaso di diffusione e, per evitare scosse nella sua estrazione, veniva lasciata nel vaso durante tutta l'esperienza.

« Usando tali cure ho potuto innanzi tutto trovare verificato il teorema che il Wiener aveva enunciato: « La superficie di diffusione rimane costantemente invariata col variare della sua forma, per quanto a lungo proceda la diffusione, purchè non raggiunga ancora in modo sensibile gli estremi del vaso » meglio di quello che non aveva potuto trovarlo verificato il Wiener stesso. Ciò si può vedere nel seguente quadro in cui riporto i valori dell'area di diffusione per alcune curve relative ad una stessa esperienza per ogni concentrazione da me studiata.

« In esso le F_1, F_2, F_3 rappresentano le aree di diffusione di una stessa esperienza; nella colonna concentrazione le notazioni ${}_2N$, ${}_1N$, $\frac{1}{2}N$, $\frac{1}{5}N$ rappresentano il titolo della soluzione, 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$ normale, intendendo per normale, come è cognito, quella soluzione che in un litro contiene sciolto il peso molecolare del sale.

concentrazione	F_1	F_2	F_3
${}_2N$	2,2231	2,2273	2,2245
	2,0489	2,0331	2,0491
${}_1N$	1,5114	1,5182	1,5100
	1,4487	1,4433	1,4423
	1,5544	1,5508	1,5479

concentrazione	F_1	F_2	F_3
$\frac{1}{2}$N	1,1958	1,1982	1,1937
	1,2684	1,2734	1,2713
	1,3511	1,3550	1,3568
$\frac{1}{5}$N	1,3474	1,3441	
	0,8661	0,8522	

« Le misure che io ho sino ad ora eseguito, lo furono su cloruro di sodio. Per averlo puro, ho cristallizzato dalla sua soluzione cloruro di sodio di Kahlbaum. Da questo ho preparato per pesata quattro soluzioni titolate: 2 Normale, 1 normale, $\frac{1}{2}$ normale e $\frac{1}{5}$ normale.

« Per il calcolo del coefficiente ho usato la formula sviluppata dal Wiener per il metodo delle deviazioni massime

$$k = \frac{\eta^2 F^2}{4\pi(t_2 - t_1)} \cdot \frac{Z_1^2 - Z_2^2}{Z_1^2 \cdot Z_2^2}$$

in cui k indica il coefficiente di diffusione: η il rapporto tra due distanze e_2 ed e_1 $\left(\eta = \frac{e_2}{e_1}\right)$; e_1 distanza tra la lente di proiezione e lo schermo, e_2 distanza della stessa lente dal piano di mezzo del vaso di diffusione; t_1, t_2 i tempi (durante il diffondersi di una stessa soluzione) a cui sono state fotografate due curve di deviazioni massime Z_1, Z_2. Devo qui però notare che η non l'ho calcolato esattamente come il rapporto definito tra le due distanze dello schermo e del piano di mezzo del vaso di diffusione della lente di proiezione, ma da un punto facilmente determinabile, posto più innanzi. Giacchè l'ufficio di quella costante η nello sviluppo del calcolo è di rappresentare la misura nella quale vengono ingrandite le dimensioni del vaso, le ascisse dei suoi punti, passando allo schermo per mezzo della proiezione dalla lente. Le e_1 ed e_2 sono cioè due lati di due triangoli simili, di cui altri due lati sono la metà delle lunghezze della linea luminosa sulla vasca di diffusione e sulla lastra fotografica; il vertice quindi di questi triangoli non sarà esattamente sulla lente, ma un poco più verso il vaso di diffusione. Le distanze e_1, e_2 le ho quindi calcolate a partire da questo punto. Ciò premesso, ecco nel seguente quadro i valori che per il coefficiente di diffusione del cloruro di sodio ho trovato per le quattro concentrazioni da me studiate. I valori della costante sono stati ridotti alla temperatura di 18° mediante la formula: $k_t = k_{18} \{1 + 0.026\,(t - 18)\}$

concentrazione	k_{18}
$_2$N	1,109
$_1$N	1,078
$\frac{1}{2}$N	1,065
$\frac{1}{5}$N	1,069

« Questi valori mostrerebbero dapprima una diminuzione del coefficiente di diffusione per il cloruro di sodio col diminuire della concentrazione, accennerebbero quindi ad un minimo posto tra i valori $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{5}$ della concentrazione. L'esistenza di questo minimo presenterebbe certamente un fatto molto singolare; forse più semplicemente non si tratta che del tendere del coefficiente di diffusione ad un valore costante, cadendo quella piccola differenza tra i numeri 1,065, 1,069 nei limiti degli errori di osservazione; tornerò quindi sull'argomento per decidere meglio la questione.

« Si potrebbe obbiettare contro i precedenti numeri, perchè calcolati in base ad una formula che suppone il coefficiente costante mentre vuol proprio studiare la sua variabilità. Ma si ha da osservare che la durata di un'intiera esperienza (in cui sono state eseguite più misure) è variata a seconda della concentrazione delle soluzioni da 9^h a 21^h. Il tempo quindi tra una misura e l'altra è stato relativamente così breve, da permettere di trascurare tale variabilità in quell'intervallo. Ciò è dimostrato dagli stessi valori ottenuti per ciascuna delle esperienze; giacchè in alcune questi valori tenderebbero ad indicare una regolare diminuzione del coefficiente col diminuire della concentrazione; in altre indicherebbero una variazione perfettamente in senso contrario; in altre infine non si riscontra alcun regolare andamento. La formula sviluppata dal Boltzmann [1] per k variabile, bellissima teoricamente, in pratica è difficilmente applicabile per la difficoltà di misurare esattamente quelle ascisse y, e sopratutto la y_0 ascissa del centro di gravità.

Fisiologia. — *Sugli albuminoidi del sangue nel cane in relazione con gli effetti della tiroidectomia.* Nota del dott. VIRGILIO DUCCESCHI, presentata dal Socio LUCIANI.

« I fisiologi sono ormai quasi tutti d'accordo nell'ammettere che i fenomeni della cachessia strumipriva, dipendono da un processo di autointossicazione in rapporto con un disturbo della crasi sanguigna; era naturale quindi che si andasse a ricercare se vi fossero delle alterazioni nella composizione chimica del sangue. Però quasi niente si è fatto in questo senso, se si eccettuano le ricerche sui gas del sangue fatte dall'Albertoni e Tizzoni.

« Fu perciò mio intendimento di studiare in qual modo si comporta la composizione del sangue dopo la tiroidectomia.

« Ho cominciato con lo studio degli albuminoidi del siero, di cui riassumo quì i resultati più importanti. Le determinazioni di essi furono fatte col metodo di Hammarsten, facendo sempre due prove di controllo. Si toglie-

[1] Wiedemann, Ann., vol. 53, 1894, pag. 959.

vano al cane per le ricerche, circa 50 cc. di sangue; l'esame si faceva nel cane normale, poi all'insorgere dei noti fenomeni, durante il decorso di essi, e prima della morte. In un animale si studiò anche l'influenza della tiroidectomia e del digiuno associati sulla crasi sanguigna; i cani operati vissero da 3 a 21 giorni e presentarono tutti il noto quadro della cachessia tireopriva.

« Dalle analisi si ebbero i seguenti resultati. Nel periodo di tempo che precede l'esordire dell'attacco convulsivo, aumentano le serine e diminuiscono le globuline; il totale degli albuminoidi, valore in parte relativo alla concentrazione del sangue nel momento dell'esperienza, si comporta in modo variabile. In un secondo periodo, cioè quando i fenomeni convulsivi sono in atto e fino alla morte, si ha un aumento progressivo delle globuline ed una diminuizione delle serine e del totale degli albuminoidi. Si ha perciò dapprima un aumento, poi una diminuizione del quoziente albuminoideo.

« Circa alla interpretazione dei fatti osservati, mi sembra che l'aumento delle serine e la diminuizione delle globuline del primo periodo esprimano un rallentamento degli scambi nutritivi dei tessuti per cui l'albuminoide formativo, la serina, circola meno utilizzato, mentre diminuisce la corrente degli albuminoidi di ritorno dai tessuti al sangue.

« Nel secondo periodo invece aumentano, per la presenza dei fenomeni caratteristici, i processi disintegrativi dei tessuti e con essi le globuline, mentre diminuiscono le serine ed il totale degli albuminoidi per lo stato di inanizione in cui cade l'animale e per i ripetuti salassi.

« Questi fatti condurrebbero alla conclusione che in conseguenza della tiroidectomia si abbia un rallentamento nel metabolismo azotato (e così farebbero pensare anche le recenti ricerche di Dutto e Lo Monaco) [1] pel quale potrebbero arrestarsi in circolo dei prodotti intermedî di incompleta dissociazione o di pervertita trasformazione degli albuminoidi, i quali potrebbero essere la causa dei fenomeni della cachessia strumipriva, quando si voglia ammettere, come ci sembra assai probabile, che essa sia dovuta ad un processo di antointossicazione ».

PERSONALE ACCADEMICO

Giunse all'Accademia la dolorosa notizia della morte del Socio straniero Luigi Pasteur mancato ai vivi il 29 settembre 1895; apparteneva il defunto Socio all'Accademia, sino dal 7 settembre 1888.

[1] Dutto e Lo Monaco, *Alcune ricerche sul metabolismo dei cani privati delle tiroidi* (Rendiconti della R. Acc. dei Lincei; vol. IV, 1° sem., fasc. XI, 1895).

CORRISPONDENZA

Ringraziarono per le pubblicazioni ricevute:

La R. Società zoologica di Amsterdam; la Società Reale di Sidney; il Museo di zoologia comparata di Cambridge Mass.

Annunciarono l' invio delle proprie pubblicazioni:

La Società geologica di Calcutta; l' Osservatorio di Nizza.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

dal 2 settembre al 6 ottobre 1895.

Catalogue de la Bibliothèque de la Société des Sciences de Nancy. Nancy, 1894. 8°.

Catalogue of 1713 Stars for the Equinox 1885·0. from observations made at the Royal Observatory Cape of Good Hope, during the years 1879 to 1885. London, 1894. 4°.

Clerici E. — Sopra l'Acicularia italica, nuovo fossile problematico. Roma, 1895. 8°.

Id. — Sopra un giacimento di diatomee presso Viterbo. Roma, 1895. 8°.

Jack J. B. — Beiträge zur Kenntniss der Pellia-Arten. s. l. 1895. 8°.

Janet Ch. — Études sur les fourmis, les gnêpes et les abeilles. Notes IX-XI. Paris, 1895. 8°.

Le Jolis A. — Remarques sur la nomenclature bryologique. Cherbourg, 1895. 8°.

Minucci F. — Catalogo descrittivo illustrato del materiale scientifico, e suppellettile tecnica del Gabinetto chimico della farmacia del Manicomio di s. Nicola in Siena. Siena, 1895. 16°.

Noether M. — Arthur Cayley. Leipzig, 1895. 8°.

Results of meridian Observations of Stars made at the Royal Observatory, Cape of Good Hope from 1885 August to 1887 December. London 1894, 4°.

Westphal A. — Untersuchungen über den selbstregistrirenden Universalpegel zu Swinemünde. Berlin, 1895. 4°.

P. B.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia prima del 20 ottobre 1895.

Matematica. — *Sulla forma Hessiana.* Nota del Corrispondente C. Segre.

« È noto quale sia in generale la multiplicità della Hessiana di una curva piana e di una superficie in un punto multiplo della forma fondamentale, e quali rette siano le tangenti alla Hessiana in questo punto [1]. Poniamo, per maggior generalità, che si abbia una forma f d'ordine n ad un numero qualunque, $d+1\ (\geq 3)$, di variabili $x_0\, x_1\, x_2 \ldots x_d$, ossia una forma dello spazio a d dimensioni; e sia il punto $O\,(1\,0\,0 \ldots 0)$ s-plo per questa forma ($s < n$), sicchè

$$f \equiv x_0^{\,n-s}\, u^s + x_0^{\,n-s-1}\, u^{s+1} + \cdots,$$

dove i simboli u^s, $u^{s+1}, \ldots$ indicano forme nelle sole d variabili $x_1\, x_2 \ldots x_d$, rispettivamente degli ordini s, $s+1, \ldots$ Indichiamo poi coll'aggiungere indici inferiori $1, 2, \ldots, d$ a quei simboli la derivazione delle corrispondenti forme rispetto ad $x_1, x_2, \ldots x_d$. Allora la Hessiana di f, quando per brevità si ponga $x_0 = 1$, sarà:

$$\begin{vmatrix} (n-s)(n-s-1)u^s+(n-s-1)(n-s-2)u^{s+1}+\cdots & (n-s)u_1^{\,s}+(n-s-1)u_1^{\,s+1}+\cdots & (n-s)u_2^{\,s}+(n-s-1)u_2^{\,s+1}+\cdots & \cdots \\ (n-s)u_1^{\,s}+(n-s-1)u_1^{\,s+1}+\cdots & u_{11}^{\,s}+u_{11}^{\,s+1}+\cdots & u_{12}^{\,s}+u_{12}^{\,s+1}+\cdots & \cdots \\ (n-s)u_2^{\,s}+(n-s-1)u_2^{\,s+1}+\cdots & v_{12}^{\,s}+u_{12}^{\,s+1}+\cdots & u_{22}^{\,s}+u_{22}^{\,s+1}+\cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

[1] V. Brill, *Ueber die Hesse'sche Curve,* Math. Annalen 13 (1878); Rohn, *Das Verhalten der Hesse'schen Fläche in den vielfachen Punkten und vielfachen Curven einer gegebenen Fläche,* Math. Annalen 23 (1884). — Cfr. anche E. Kötter, *Die Hesse'sche Curve in rein geometrischer Behandlung,* Math. Ann. 34 (1889).

È opportuno trasformarla (col sig. Rohn, loc. cit.) aggiungendo anzitutto alla 1ª orizzontale moltiplicata per $-(s-1)$ quelle seguenti moltiplicate per $(n-s)\,x_1$, $(n-s)\,x_2, \ldots$, con che la 1ª orizzontale viene ad avere in tutti gli elementi un fattore $(n-1)$, che si sopprimerà; e poi operando una modificazione analoga sulla 1ª verticale. Con ciò si viene ad introdurre l'ipotesi: $s > 1$. E la Hessiana di f diventa, a meno del fattor numerico $\left(\frac{n-1}{s-1}\right)^2$:

$$\begin{vmatrix} -\varrho u^s-(\varrho-2)u^{s+1}-\cdots-(\varrho-h.h+1)u^{s+h}-\cdots, & u_1^{s+1}+2u_1^{s+2}+\cdots+hu_1^{s+h}+\cdots, & u_2^{s+1}+2u_2^{s+2}+\cdots, & \cdots \\ u_1^{s+1}+2u_1^{s+2}+\cdots+hu_1^{s+h}+\cdots, & u_{11}^s+u_{11}^{s+1}+\cdots & , u_{12}^s+u_{12}^{s+1}+\cdots & , \cdots \\ u_2^{s+1}+2u_2^{s+2}+\cdots & , u_{12}^s+u_{12}^{s+1}+\cdots & , u_{22}^s+u_{22}^{s+1}+\cdots & , \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

dove per brevità, s'è posto

$$\frac{(s-1)(n-s)}{n-1} = \varrho \ .$$

Sviluppando ora questo determinante (che nel seguito indicherò con Δ), si vede subito che l'insieme dei termini del minimo ordine nelle variabili $x_1 \ldots x_d$ sarà dato in generale da $-\varrho u^s$ moltiplicato per la Hessiana della forma u^s rispetto a quelle variabili, e sarà quindi d'ordine $s+d\,(s-2)=(d+1)\,s-2d$. Adunque: *l'Hessiana di f ha in generale nel punto s-plo di questa forma la multiplicità* $(d+1)\,s-2d$; *il suo cono tangente in quel punto si compone del cono tangente ad f* (*cioè* u^s) *e del cono Hessiano di questo* (Hessiana di u^s rispetto alle variabili $x_1 \ldots x_d$). È questa, se si pone $d=2$ e $d=3$, la proposizione nota a cui alludevamo da principio.

« Riguardo ad essa si osservi che la multiplicità dell'Hessiana di f riuscirà maggiore di quella enunciata, quando svanisca il gruppo di termini di cui s'è parlato, vale a dire (poichè u^s non è identicamente nullo) quando sia identicamente nulla l'Hessiana di u^s rispetto ad $x_1 \ldots x_d$. Si sanno assegnare tutte le forme u^s per le quali ciò accade [1]; il caso più ovvio ed il solo che si presenti finchè $d \leq 4$ è quello in cui u^s abbia un elemento $(x_1 \ldots x_d)$ s-plo, cioè il cono d'ordine s e di centro O rappresentato dalla forma u^s abbia una generatrice s-pla e sia quindi un *cono di 2ª specie* avente per *sostegno* questa retta. Poniamo, più in generale, che il cono u^s tangente nel punto s-plo O ad f sia *di specie* $i+1$, cioè abbia per sostegno uno spazio S_i $(0 \leq i \leq d-1)$. Assumiamo questo spazio come spazio fondamentale $x_{i+1} = \cdots = x_d = 0$: allora l'ipotesi fatta equivale a dire che la forma u^s contiene solo le variabili $x_{i+1}, \ldots, x_d$ e non $x_1, \ldots, x_i$. Ne segue che sono nulle le $u_{1k}^s, \ldots, u_{ik}^s$ per tutti i valori di k; e che per conseguenza nello

(1) Gordan u. Nöther, *Ueber die algebraischen Formen, deren H e s s e'sche Determinante identisch verschwindet*, Math. Ann. 10 (1876).

sviluppo del nostro determinante Δ l'insieme dei termini del minimo ordine sarà ora dato, in generale, da

$$-\varrho u^s \times \begin{vmatrix} u_{11}^{s+1} & \dots & u_{1i}^{s+1} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ u_{1i}^{s+1} & \dots & u_{ii}^{s+1} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} u^s_{i+1,i+1} & \dots & u^s_{i+1,d} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ u^s_{i+1,d} & \dots & u^s_{d,d} \end{vmatrix}$$

Dunque: *in un punto s-plo di f tale che il cono tangente in esso ad f abbia per sostegno un* S_i *la Hessiana di f ha in generale la multiplicità* $(d+1)s-2d+i$; *fanno parte del cono tangente alla Hessiana di f in generale il cono d'ordine s tangente ad f ed anche l' Hessiano d'ordine* $(d-i)(s-2)$ *di questo cono nella forma fondamentale di spazi* S_{i+1} *che ha per sostegno l'*S_i. Quanto alla parte residua, data dal determinante delle 2e derivate di u^{s+1} rispetto a $x_1, \dots, x_i$, si osservi che queste derivate coincidono con quelle della forma $(n-s)x_0u^s+u^{s+1}$, che è la polare d'ordine $s+1$ del punto O rispetto ad f: e si potrà dire, ad esempio, che *la parte residua, d'ordine* $i(s-1)$, *del cono tangente in* O *alla Hessiana di f è l'inviluppo dei coni di centro* O *che sono le seconde polari dei punti dell'*S_i *rispetto alla polare d'ordine* $s+1$ *di* O *rispetto ad f.* — Fra le applicazioni che si possono fare di questa proposizione va rilevato il caso che la forma f ammetta una varietà M_i di dimensione i di punti s-pli: perchè allora il cono tangente ad f in un punto generico di quella varietà è in generale appunto di specie $i+1$. —

« Ma lo scopo di questa Nota non è di approfondire ulteriormente la determinazione delle multiplicità che in vari casi può avere l' Hessiana di f: analisi che già nel campo ternario appare un po' minuziosa. Si tratta invece di richiamar l'attenzione su un fatto relativo ai contatti della Hessiana di f con le rette tangenti ad f nel punto O. Poniamo che una retta t incontri f nel punto s-plo O un numero qualsiasi $s+h$ di volte, o, come diremo per brevità, abbia con f in O un *contatto d'ordine h*: vogliamo vedere di qual ordine sarà il suo contatto con la Hessiana di f. Assumiamo t come retta fondamentale $x_2=\dots=x_d=0$: sostituendo queste equazioni nella $f=0$ dovrà venire la soluzione $x_1=0$ $s+h$ volte. Potremo dunque porre (ordinando secondo le potenze discendenti di x_1):

$$\begin{aligned}
u^s &\equiv x_1^{s-1}\sum a_l x_l + \frac{1}{2}x_1^{s-2}\sum a_{lk}\,x_l x_k + \cdots \\
u^{s+1} &\equiv x_1^{s}\sum b_l x_l + \frac{1}{2}x_1^{s-1}\sum b_{lk}\,x_l x_k + \cdots \\
&\dots\dots\dots\dots \\
u^{s+h-1} &\equiv x_1^{s+h-2}\sum d_l x_l + \frac{1}{2}x_1^{s+h-3}\sum d_{lk}\,x_l x_k + \cdots \\
u^{s+h} &\equiv e x_1^{s+h} + x_1^{s+h-1}\sum e_l x_l + \cdots \\
&\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

dove gl'indici l, k variano da 2 a d ed è

$$e \neq 0 \ .$$

Il numero delle intersezioni coincidenti in O della retta t con la Hessiana di f sarà dato dal minimo esponente a cui comparirà x_1 in questa Hessiana dopo che vi si sia posto $x_2 = \cdots = x_d = 0$. Riscriviamo dunque il determinante Hessiano Δ ponendovi per le u le loro espressioni attuali; ed inoltre annullandovi $x_2, \ldots, x_d$, e tenendo solo conto, in ciascun elemento, del termine più basso in x_1. Avremo:

$$\begin{vmatrix} -(\varrho - h\,.\,h+1)\,e x_1^{s+h}, & h(s+h)\,e x_1^{s+h-1}, & b_2 x_1^s, & b_3 x_1^s, & \ldots \\ h(s+h)\,e x_1^{s+h-1}, & (s+h)(s+h-1)\,e x_1^{s+h-2}, & (s-1)\,a_2 x_1^{s-2}, & (s-1)\,a_3 x_1^{s-2}, & \ldots \\ b_2 x_1^s, & (s-1)\,a_2 x_1^{s-2}, & a_{22} x_1^{s-2}, & a_{23} x_1^{s-2}, & \ldots \\ b_3 x_1^s, & (s-1)\,a_3 x_1^{s-2}, & a_{23} x_1^{s-2}, & a_{33} x_1^{s-2}, & \ldots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

Analizzando questo determinante si vede che l'insieme dei termini più bassi nel suo sviluppo sarà dato da

$$(1) \qquad x_1^{(d+1)s-2d+2} \times (s-1)^2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & b_2 & b_3 & \ldots \\ 0 & 0 & a_2 & a_3 & \ldots \\ b_2 & a_2 & a_{22} & a_{23} & \ldots \\ b_3 & a_3 & a_{23} & a_{33} & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

oppure da

$$(2) \qquad x_1^{(d+1)s-2d+h} \times (-\varrho + h\,.\,h+1)(s-1)^2 e \begin{vmatrix} 0 & a_2 & a_3 & \ldots \\ a_2 & a_{22} & a_{23} & \ldots \\ a_3 & a_{23} & a_{33} & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

o finalmente dalla somma di queste espressioni, a seconda che $h > 2$, oppure $h < 2$, oppure $h = 2$. Però questa distinzione di casi non occorre se $d = 2$, cioè se f è una forma ternaria, una curva piana; giacchè allora il determinante che comparisce in (1) svanisce identicamente, e quindi rimane solo in ogni caso l'espressione (2). Concludiamo la proposizione seguente:

« *Abbiasi una retta t la quale nel punto* O *s-plo per f abbia un incontro $(s+h)$-punto, cioè (come diremo anche) un contatto d'ordine h, con f. Allora:* 1°) *se $d > 2$, cioè se si esclude il caso della curva piana, e se inoltre è $h \geq 2$, la retta t avrà in generale con la Hessiana di f in* O *un incontro multiplo secondo $(d+1)s - 2d + 2$, cioè un contatto di 2° ordine.* 2°) *se invece si tratta di una curva piana, cioè $d = 2$ (qualunque sia h); oppure anche se $h = 0$ od $h = 1$ (qualunque sia d); la*

retta t avrà in generale in O *con la Hessiana di f un incontro multiplo secondo* $(d+1)s-2d+h$, *ossia un contatto d'ordine h.*

« Si vede pure quando è che vi sarà eccezione, cioè che il contatto della retta t con la Hessiana di f sarà più elevato dell'enunciato. Dovrà svanire quel termine, (1), o (2), o loro somma, che abbiamo ottenuto come il più basso; cioè dovrà svanire il suo coefficiente. Ed è facile assegnare un significato geometrico a questa condizione. Nel 1° caso ($d>2$, $h \geq 2$) la condizione che otteniamo per un contatto d'ordine superiore al 2° dipende dai coefficienti di f (e precisamente di u^s, u^{s+1}) (¹). Ma nel 2° caso ($d=2$, oppure $h=0,1$) la condizione, che deriva allora dall'espressione (2), può soddisfarsi in due modi; cioè annullando il determinante che compare nel coefficiente di (2), ed anche annullando il fattore $(-\varrho+h\,.\,h+1)$. Sostituendo a ϱ il suo valore abbiamo: *Se si tratta di una curva piana, cioè se* $d=2$; *oppure anche se d è qualunque, ma* $h=0$ *oppure* $h=1$; *la retta t a contatto d'ordine h con f avrà contatto d'ordine maggiore di h* (²) *con la Hessiana di f:* 1°) *quando essa giace nel cono Hessiano del cono tangente in* O *ad f;* 2°) *quando fra l'ordine n di f, la multiplicità s in* O, *ed il numero h passa la relazione*

$$\frac{(s-1)(n-s)}{n-1}=h(h+1)\ .$$

« È facile determinare tutte le soluzioni intere $h>0$, $s>1$, $n>s$ di questa relazione. Per brevità si scriva di nuovo $h(h+1)=\varrho$, ed in luogo di $s-1$ ed $n-s$ si scriva x e y: si avrà l'equazione

$$\frac{xy}{x+y}=\varrho\ ,$$

ossia

$$(x-\varrho)(y-\varrho)=\varrho^2\ ,$$

donde risulta che $x-\varrho$ ed $y-\varrho$ sono due divisori di ϱ^2, fra loro reciproci (rispetto a ϱ^2), entrambi positivi (perchè se fossero negativi, tenendo conto che x e y son positivi, risulterebbero entrambi quei divisori di ϱ^2 minori di ϱ in valor assoluto). Dunque: per ogni valore di h, assunto ad arbitrio, si calcoli $\varrho=h(h+1)$, si prendano (in tutti i modi possibili) due divisori positivi di ϱ^2 fra loro reciproci (rispetto a ϱ^2), e ad ognuno di essi s'ag-

(¹) Nel campo quaternario, $d=3$, la condizione perchè la retta t a contatto d'ordine $h>2$ con f, abbia contatto d'ordine superiore al 2° con la Hessiana di f si riduce a questo: che t conti almeno due volte fra le $s(s+1)$ tangenti principali di f in O (cioè fra le generatrici comuni ai coni u^s, u^{s+1}).

(²) Più esatto sarebbe dire « un incontro multiplo secondo più di $(d+1)s-2d+h$ ». Analogamente nel seguito.

giunga ϱ: l'una somma darà $s-1$, e l'altra $n-s$, da cui poi si otterrà n. Come si vede, con ogni soluzione (h, s, n) esisterà pure la soluzione $(h, n-s+1, n)$.

« Per $h=1$ si ottengono in questo modo tre soluzioni: $n=9$, $s=5$; $n=10$, $s=4$; $n=10$, $s=7$. Dunque: *al fatto che le tangenti ad una forma f in un suo punto multiplo sono pure tangenti alla Hessiana di f in questo punto si può aggiungere che esse diventano tutte quante tangenti principali od osculatrici (cioè a contatto d'ordine superiore al 1°) per la detta Hessiana nei casi di una forma f del 9° ordine con punto 5-plo*, e *di una forma f del 10° ordine con punto 4-plo, oppure 7-plo.*

« Per $h=2$, e così pure per valori superiori di h, bisogna limitarsi alle forme ternarie. E si ha: *se una retta ha contatto di 2° ordine con una curva piana in un punto multiplo di questa, essa vi avrà pure contatto di 2° ordine, in generale, con la curva Hessiana; ma avrà contatto di ordine superiore al 2° con la Hessiana, quando la curva fondamentale sia d'ordine* 25; 26; 28; 33; 50 *ed abbia nel punto la multiplicità rispett.* 13; 11 *oppure* 16; 10 *oppure* 19; 9 *oppure* 25; 8 *oppure* 43.

« Ecc. ecc.

« Sembra degna di rilievo l'esistenza di queste forme f particolari solo per l'ordine e per la multiplicità (ma non ulteriormente, pei coefficienti), le cui Hessiane hanno nel punto di cui si tratta singolarità più elevate (rispetto alle tangenti) di quel che non abbiano in generale.

« Non occorre nemmeno avvertire che fatti analoghi si riscontrano più in generale nello studio della *Jacobiana* di più forme, quando si prenda in esame l'ordine del contatto che essa ha con una retta passante per un suo punto determinato ».

Matematica. — *Sulle corrispondenze algebriche* $[m_1, m_2, \ldots, m_r]$ *fra r punti di uno spazio lineare di quante si vogliano dimensioni.* Nota di LUIGI BERZOLARI, presentata dal Corrispondente C. SEGRE.

« In questo lavoro mi propongo di dimostrare alcuni teoremi sulle corrispondenze, che chiamo $[m_1, m_2, \ldots, m_r]$, e che sono definite da un'equazione di gradi arbitrari $m_1, m_2, \ldots, m_r$ nelle coordinate di r punti di uno spazio ad un numero qualunque di dimensioni. Tali corrispondenze sono la naturale estensione di quelle che il De Paolis (rappresentandole collo stesso simbolo) ha studiato per le forme di 1ª specie nell'ultimo lavoro da lui pubblicato [1], e che dovevano servirgli di fondamento per una trattazione pu-

[1] *Le corrispondenze projettive nelle forme geometriche fondamentali di 1ª specie* (Mem. d. R. Acc. d. Scienze di Torino, Serie II, t. XLII, 1892).

ramente geometrica della teoria degli enti algebrici (¹). Nei teoremi che seguono rientrano come casi assai particolari parecchie note proposizioni di varia indole (e dovute a diversi autori, come apparirà dalle citazioni che verrò facendo), alcune delle quali sono molto importanti.

1. Data una forma algebrica con r serie di $n+1$ variabili omogenee $x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, \dots, x_i^{(r)}$ $(i=1, 2, \dots, n+1)$, dei gradi $m_1, m_2, \dots, m_r$ risp., rappresentiamola simbolicamente con $a_{x^{(1)}}^{(1)^{m_1}} a_{x^{(2)}}^{(2)^{m_2}} \dots a_{x^{(r)}}^{(r)^{m_r}}$, di modo che avranno significato soltanto i prodotti contenenti m_1 simboli $a^{(1)}$, m_2 simboli $a^{(2)}, \dots, m_r$ simboli $a^{(r)}$. Se si considerano le $x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, \dots, x_i^{(r)}$ come coordinate omogenee di r punti $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(r)}$ di uno stesso spazio lineare S_n ad n dimensioni, l'equazione

$$a_{x^{(1)}}^{(1)^{m_1}} a_{x^{(2)}}^{(2)^{m_2}} \dots a_{x^{(r)}}^{(r)^{m_r}} = 0$$

stabilisce fra questi punti una corrispondenza, che diremo $[m_1, m_2, \dots, m_r]$, tale che ad $r-1$ punti $x^{(1)}, \dots, x^{(i-1)}, x^{(i+1)}, \dots, x^{(r)}$, presi comunque in S_n, corrispondono i punti $x^{(i)}$ di una varietà (ad $n-1$ dimensioni) di ordine m_i.

« Se in particolare gli $r-1$ punti coincidono in un solo y, diremo che y vien considerato come punto $(r-1)$-plo; e se anche uno dei punti $x^{(i)}$ coincide con y, diremo che y è un punto r-plo della corrispondenza. Il luogo dei punti r-pli è la varietà V di ordine Σm_i, avente per equazione nelle coordinate x_i:

$$a_x^{(1)^{m_1}} a_x^{(2)^{m_2}} \dots a_x^{(r)^{m_r}} = 0 .$$

« Ciò posto, se y è un punto arbitrario di S_n, esso può considerarsi come $(r-1)$-plo in r modi diversi, e le r varietà degli ordini $m_1, \dots, m_r$, che così gli corrispondono, sono rappresentate, nelle coordinate x_i, dalle equazioni:

$$(1)\quad \begin{cases} a_x^{(1)^{m_1}} a_y^{(2)^{m_2}} \dots a_y^{(r)^{m_r}} = 0 , \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_y^{(1)^{m_1}} a_y^{(2)^{m_2}} \dots a_y^{(r-1)^{m_{r-1}}} a_x^{(r)^{m_r}} = 0 . \end{cases}$$

« Gl'iperpiani polari di y rispetto a queste varietà hanno risp. per equazioni:

$$A_{x^{(1)}} \equiv a_y^{(1)^{m_1-1}} a_x^{(1)} a_y^{(2)^{m_2}} \dots a_y^{(r)^{m_r}} = 0 ,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$A_{x^{(r)}} \equiv a_y^{(1)^{m_1}} \dots a_y^{(r-1)^{m_{r-1}}} a_y^{(r)^{m_r-1}} a_x^{(r)} = 0 ,$$

(¹) Cfr. la prefazione al l. c. e la Nota postuma dello stesso A., *Teoria generale delle corrispondenze projettive* ecc. (Rendic. d. R. Accad. dei Lincei, vol. III, 2° sem., serie 5ª, pag. 225).

mentre l'iperpiano polare di y rispetto alla varietà V è rappresentato da:

$$\sum_1^r m_i \, A_x^{(i)} = 0 \,. \tag{2}$$

« Supponendo quindi $r \leq n+1$, gli r primi iperpiani individuano una forma fondamentale d'iperpiani, in generale di specie $r-1$ (cioè un sistema lineare ∞^{r-1} d'iperpiani), alla quale appartiene l'iperpiano ultimamente considerato. Se infine imaginiamo lo spazio S_{n-r+1} individuato da y e dal sostegno della forma precedente [1], ed osserviamo che si ha:

$$A_y^{(1)} = \cdots = A_y^{(r)} = a_y^{(1)^{m_1}} \ldots a_y^{(r)^{m_r}} \,,$$

risulta che tutti gl'iperpiani passanti per S_{n-r+1} hanno un'equazione della forma

$$\sum_1^r \varrho_i \, A_x^{(i)} = 0 \,, \tag{3}$$

dove le ϱ_i sono costanti indipendenti da y e vincolate dalla sola condizione

$$\sum_1^r \varrho_i = 0 \,. \tag{4}$$

Ciò fornisce il teorema:

« *Se in uno spazio lineare di n dimensioni si ha una corrispondenza* $[m_1, \ldots, m_r]$ (*con* $r \leq n+1$), *e se un punto arbitrario y si considera come* $(r-1)$-*plo per essa negli r modi possibili, gl'iperpiani polari di y rispetto alle r varietà, che così gli corrispondono, individuano una forma fondamentale di specie* $r-1$, *alla quale appartiene pure l'iperpiano polare di y rispetto alla varietà luogo dei punti r-pli della corrispondenza: questi* $r+1$ *iperpiani e lo spazio* S_{n-r+1}, *che vien determinato da y e dal sostegno della forma fondamentale precedente, costituiscono un gruppo, che si conserva proiettivo a sè stesso col variare del punto y.*

« Se $r=2$, risultano quattro iperpiani di uno stesso fascio, i quali, considerati in un ordine opportuno, hanno il birapporto costante $-\frac{m_2}{m_1}$: per $n=1$ si ottiene di qui un teorema dovuto al Kohn [2] e relativo ad una

[1] Nel caso estremo $r=n+1$ la forma fondamentale è composta di tutti gl'iperpiani di S_n, e lo spazio S_{n-r+1} si riduce al punto y.

[2] Sitzungsb. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien, 17 Juli 1884, dove il teorema è dall'Autore dimostrato partendo da una scelta particolare degli elementi di riferimento sul sostegno della forma. Questo teorema del Kohn ne comprende a sua volta due altri, dovuti a Schröter (Journ. für Math., Bd. LXXVII, pag. 120-121) e Stephanos (*Mém. sur les faisceaux de formes binaires*, ecc., Mém. pres. par divers savants ecc., t. XXVII, n. 16), relativi ai casi, in cui la corrispondenza è risp. una projettività oppure un'involuzione di grado qualunque. L'importante teorema ora ricordato (e dovuto allo Schröter) sull'*involuzione unita* di un'omografia binaria, è stato completato e nuovamente dimostrato colla pura geometria in lavori ormai notissimi di H. Wiener e Segre.

qualsiasi corrispondenza algebrica $[m_1, m_2]$ data in una forma di 1ª specie; per n qualunque ed $m_1 = m_2 = 1$, cioè per una correlazione data in S_n, si ricava invece (per ora, soltanto in parte) un teorema, col quale il Segre [1] ne ha generalizzato un altro, che fu stabilito dallo Schröter [2] per una correlazione assegnata in una forma di 2ª o di 3ª specie, e completato poi dallo Sturm e dal Battaglini [3].

« 2. Considerando la varietà d'ordine Σm_i rappresentata dal prodotto delle (1), si trova che l'iperpiano polare di y rispetto ad essa ha per equazione la stessa (2), sicchè:

Se in uno spazio lineare di quante si vogliano dimensioni è data una corrispondenza $[m_1, \ldots, m_r]$, e se di un punto arbitrario y si considera l'iperpiano polare rispetto alla varietà d'ordine Σm_i costituita dall'insieme delle r varietà degli ordini $m_1, \ldots, m_r$ che ad esso corrispondono, quando lo si riguardi come $(r-1)$-plo per la corrispondenza negli r modi possibili, tale iperpiano è anche l'iperpiano polare di y rispetto alla varietà d'ordine Σm_i formata dai punti r-pli della corrispondenza.

« Per $r = 2$ ed $n = 1$ si ritrova un'altra proprietà osservata dal Kohn nel lavoro citato: in questa è compreso il teorema dato qualche anno dopo dal De Paolis nel n. 1 della breve Nota *Sulle involuzioni projettive* [4].

« Collo stesso ragionamento fatto dal De Paolis nel n. 2 della medesima Nota, si può ora ottenere una notevole estensione del teorema ivi contenuto. Invero, nel caso di una corrispondenza $[m_1, \ldots, m_r]$ data in una forma di 1ª specie (cioè per $n = 1$ ed r qualunque), un elemento arbitrario della forma, contato $\Sigma m_i - 1$ volta, insieme col suo elemento armonico di 1° ordine preso rispetto ai Σm_i elementi r-pli, costituisce un gruppo di Σm_i elementi armonico (apolare) rispetto al gruppo stesso degli elementi r-pli. Se quindi, col mezzo del teorema precedente, si costruiscono Σm_i dei detti gruppi armonici a quello degli elementi r-pli, si viene ad aver costruito il sistema lineare $\infty^{\Sigma m_i - 1}$ da essi individuato. I Σm_i elementi della forma, ciascuno dei quali, contato Σm_i volte, costituisce un gruppo di tale sistema, sono appunto gli elementi r-pli della corrispondenza. Risulta dunque:

Data in una forma di 1ª specie una corrispondenza $[m_1, \ldots, m_r]$, si può sempre, senza conoscerne i Σm_i elementi r-pli, individuare un sistema lineare $\infty^{\Sigma m_i - 1}$ di gruppi di Σm_i elementi, i cui Σm_i elementi (Σm_i)-pli siano appunto gli elementi r-pli della data corrispondenza.

[1] *Ricerche sulle omografie e sulle correlazioni in generale* ecc. (Mem. d. R. Accad. d. Scienze di Torino, Serie II, t. XXXVII), § 3.

[2] L. c., pag. 110-111 e 127-128.

[3] R. Sturm, Math. Ann., Bd. XIX, pag. 460 e segg.; Battaglini, Mem. d. R. Accad. dei Lincei, serie 3ª, vol. XII. — V. anche Montesano, *Su la corrispondenza reciproca fra due sistemi dello spazio* (Napoli, 1885), pag. 17.

[4] Rendic. d. R. Accad. dei Lincei, 5 dicembre 1886.

« 3. Consideriamo in particolare una corrispondenza, in cui sia $m_1 = ... = m_r = m$, e rappresentiamola con $[m]_r$; per tutto il resto manteniamo gli stessi simboli del n. 1. Allora l'equazione

$$(5) \qquad \sum h_i \, a_{x^{(\lambda)}}^{(1)^m} \, a_{x^{(\mu)}}^{(2)^m} \dots a_{x^{(\rho)}}^{(r)^m} = 0 \, ,$$

dove la somma comprende tutti i termini che s'ottengono ponendo per $\lambda, \mu, ..., \varrho$ tutte le possibili permutazioni dei numeri 1, 2, ..., r, e le h_i sono costanti affatto arbitrarie, definisce, al variare delle h_i, un *sistema lineare* $\infty^{r!-1}$ di corrispondenze $[m]_r$, che tutte hanno in comune la varietà dei punti r-pli, e fra le quali trovasi anche la data. Di tali corrispondenze sono specialmente notevoli le due simmetriche C_0 e C_1 risp. rappresentate dalle equazioni

$$\sum \pm \, a_{x^{(1)}}^{(1)^m} \, a_{x^{(2)}}^{(2)^m} \dots a_{x^{(r)}}^{(r)^m} = 0 \, , \quad \sum a_{x^{(\lambda)}}^{(1)^m} \, a_{x^{(\mu)}}^{(2)^m} \dots a_{x^{(\rho)}}^{(r)^m} = 0 \, .$$

« La C_1 gode della proprietà che, se un punto arbitrario y vien considerato come $(r-1)$-plo per essa, l'iperpiano polare di y rispetto alla varietà d'ordine m, che così gli corrisponde, non è altro che l'iperpiano polare di y rispetto alla varietà V. Invece la C_0 è tale che la varietà d'ordine m, corrispondente ad $r-1$ punti arbitrari, contiene ciascuno di questi punti [1].

« Per $r = 2$ il sistema (5) è un *fascio*, e le corrispondenze $[m, m]$, di cui è formato, sono a due a due inverse l'una dell'altra. Fissato un punto arbitrario y, il suo iperpiano polare rispetto alla varietà che gli corrisponde in C_0 non è altro che l'iperpiano passante per y e per l'intersezione degli iperpiani polari di y rispetto alle due varietà che corrispondono ad y nella corrispondenza data e nella sua inversa (ossia per y e per la base del fascio degl'iperpiani polari di y rispetto alle varietà che gli corrispondono nelle corrispondenze del fascio). Combinando quest'osservazione col teorema del n. 1, si conclude che il teorema dimostrato dal Segre (nel n. 11 del l. c.) per una correlazione di S_n (all'infuori di ciò che si riferisce agli spazi fondamentali dell'omografia appartenente alla correlazione stessa) sussiste, più in generale, anche per una qualsiasi corrispondenza $[m, m]$ data in S_n.

« 4. Tornando alla considerazione generale di una corrispondenza $[m]_r$, sia y un punto arbitrario di S_n, e siano $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n$ costanti qualunque indipendenti da y: allora l'equazione

$$(6) \qquad \sum_1^r \sigma_i \, A_x^{(i)} = 0$$

[1] Per $m = 1$ ed $r = 2$, cioè per una correlazione di S_n, la C_0 è un ordinario sistema nullo (degenere se n è pari).

rappresenta un determinato iperpiano E, appartenente alla forma fondamentale di specie $r-1$, di cui si è parlato nel n. 1. Ora si consideri l'equazione

$$(7) \qquad \sum_{i=1}^{i=r} \sigma_i \, a_x^{(i)^m} \sum k_j^{(i)} \, a_{x^{(\lambda)}}^{(1)^m} \dots a_{x^{(\mu)}}^{(i-1)^m} \, a_{x^{(\nu)}}^{(i+1)^m} \dots a_{x^{(\tau)}}^{(\;)^m} = 0 \,,$$

dove il secondo segno sommatorio si estende a tutti i termini che si ottengono, per un dato valore di i, ponendo per $\lambda, \dots, \mu, \nu, \dots, \tau$ tutte le possibili permutazioni dei numeri $1, 2, \dots, r-1$, e le k sono costanti indipendenti da y e soggette alle sole condizioni

$$\sum_1^{(r-1)!} k_j^{(1)} = \sum_1^{(r-1)!} k_j^{(2)} = \dots = \sum_1^{(r-1)!} k_j^{(r)} \,.$$

Al variare delle k, la (7) definisce un sistema lineare $\infty^{r!-r}$ di corrispondenze $[m]_r$ contenuto nel sistema (5): esso risulta pienamente determinato dalla data corrispondenza e dai parametri σ_i che entrano nella (6), ma non dipende affatto dalla scelta del punto y. Se ora nella (7) facciamo coincidere con y tutti gli $r-1$ punti $x^{(\lambda)}, \dots, x^{(\mu)}, x^{(\nu)}, \dots, x^{(\tau)}$, e di y cerchiamo l'iperpiano polare rispetto alla varietà d'ordine m che così gli viene a corrispondere, troviamo come equazione di tale iperpiano, qualunque siano le k, la stessa (6) che rappresenta il dato iperpiano E. Perciò, ricordando (n. 1) il significato delle (3) e (4), si ottiene il teorema:

Data in uno spazio di n dimensioni una corrispondenza $[m]_r$ (con $r \leqq n+1$) e dato un gruppo fisso G costituito da $r+1$ iperpiani e da un S_{n-r+1} passanti tutti per uno stesso S_{n-r}, risulta individuato un sistema lineare $\infty^{r!-r}$ di corrispondenze $[m]_r$, le quali hanno tutte la stessa varietà di punti r-pli che ha la data, e godono della seguente proprietà: se di un punto arbitrario y si considerano gl'iperpiani polari rispetto alle r varietà che gli corrispondono in virtù della data $[m]_r$, quando lo si riguardi come $(r-1)$-plo per essa negli r modi possibili, e se nella forma fondamentale individuata da tali iperpiani si costruisce l'iperpiano E, *che cogli r precedenti e coll'* S_{n-r+1} *individuato da y e dal sostegno della forma costituisce un gruppo proiettivo al gruppo dato* G, *allora* E *è l'iperpiano polare di y rispetto a tutte le varietà che gli corrispondono nelle corrispondenze del detto sistema lineare, quando lo si riguardi come $(r-1)$-plo per esse in un modo conveniente (che risulta lo stesso per tutte).*

« Per $r=2$ il teorema si può enunciare anche nei termini seguenti:

Data in S_n una corrispondenza $[m, m]$, e dato un numero arbitrario k, risulta individuata in S_n *una nuova corrispondenza* $[m, m]$ *avente la stessa varietà di punti uniti che ha la data, e tale che, se di un punto arbitrario y si considerano gl'iperpiani polari* E_1 *ed* E_2 *rispetto alle due varietà che gli corrispondono nella data corrispondenza e nella sua in-*

versa, e se nel fascio determinato da E_1 *ed* E_2 *si costruisce l'iperpiano* E' *siffatto che, dicendo* E *l'iperpiano dello stesso fascio passante per* y, *il birapporto* $(E\,E'\,E_1\,E_2)$ *abbia il valore dato* k, E' *risulta altresì l'iperpiano polare di* y *rispetto alla varietà che gli corrisponde nella nuova corrispondenza* $[m\,,\,m]$.

« Da questo caso particolare si deduce, per $m = n = 1$, il teorema, col quale il Pasch [1] ha generalizzato, in senso diverso da quello indicato nel n. 1 di questa Nota (cioè rimanendo nel campo binario), il teorema già ricordato di Schröter sull'involuzione unita di un'omografia binaria.

« 5. Corrispondenze come quelle considerate nei numeri precedenti s'incontrano, ad es., nello studio di r sistemi lineari proiettivi ∞^{r-1} di varietà algebriche degli ordini $m_1\,,\ldots,m_r$. Se infatti sono $\lambda_1\,,\lambda_2\,,\ldots,\lambda_r$ dei parametri variabili, e

$$\sum_1^r \lambda_i\,u_{1i} = 0\ ,\quad \sum_1^r \lambda_i\,u_{2i} = 0\ ,\ \ldots\ ,\quad \sum_1^r \lambda_i\,u_{ri} = 0$$

le equazioni di siffatti sistemi, la condizione necessaria e sufficiente perchè r punti $x^{(1)}\,,x^{(2)}\,,\ldots,x^{(r)}$ appartengano risp. ad r varietà corrispondenti dei sistemi stessi è data dall'equazione

$$\text{(8)}\qquad \begin{vmatrix} u_{11}\,(x^{(1)}) & u_{12}\,(x^{(1)}) \ldots u_{1r}\,(x^{(1)}) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ u_{r1}\,(x^{(r)}) & u_{r2}\,(x^{(r)}) \ldots u_{rr}\,(x^{(r)}) \end{vmatrix} = 0\ ,$$

che è dei gradi $m_1\,,m_2\,,\ldots,m_r$ nelle coordinate dei punti presi.

« Il caso particolare, e specialmente importante, in cui $r = 2$, si presenta anche nella considerazione di due sistemi lineari reciproci ∞^{k-1} di varietà algebriche degli ordini $m_1\,,m_2$. Siano infatti

$$\sum_1^k \lambda_i\,u_i = 0\ ,\quad \sum_1^k \mu_i\,v_i = 0$$

le equazioni dei due sistemi lineari, e

$$\sum a_{ij}\,\lambda_i\,\mu_j = 0$$

l'equazione bilineare nelle due serie di parametri variabili λ e μ, dalla quale vien definita la reciprocità fra i due sistemi. Se diciamo $x^{(1)}$ ed $x^{(2)}$ due punti di S_n, tali che esista una varietà del primo (o del secondo) si-

(1) Journal für Math., Bd. XCI, pag. 349, e *Vorlesungen über neuere Geom.*, pag. 134.

stema passante per $x^{(1)}$ (o per $x^{(2)}$), la quale corrisponda a tutte le varietà del secondo (o del primo) sistema passanti per $x^{(2)}$ (o per $x^{(1)}$), con ragionamento analogo a quello fatto dal Segre a pag. 45 e segg. del suo *Studio sulle quadriche in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni* (1), si trova che fra le coordinate di $x^{(1)}$ ed $x^{(2)}$ deve intercedere la relazione

$$(9)\qquad \begin{vmatrix} 0 & u_1(x^{(1)}) & u_2(x^{(1)}) & \ldots & u_k(x^{(1)}) \\ v_1(x^{(2)}) & a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{k1} \\ v_2(x^{(2)}) & a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{k2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ v_k(x^{(2)}) & a_{1k} & a_{2k} & \ldots & a_{kk} \end{vmatrix} = 0 \,,$$

dei gradi m_1 ed m_2 risp.

« Applicando alle corrispondenze definite dalle (8) e (9) i teoremi dei n. 1 e 2, si ottengono proposizioni, che per brevità non istiamo ad enunciare (2), e dalle quali si ricava una costruzione dell'iperpiano polare di un punto arbitrario rispetto alla varietà, risp. di ordine $\sum_1^r m_i$ od $m_1 + m_2$, generata dai sistemi lineari dati » (3).

Chimica. — *Sui derivati benzilici degli acidi santonosi e delle desmotroposantonine* (4). Nota di Nicola Castoro, presentata dal Socio E. Paternò.

« La santonina per azione dell'acido cloridrico fu trasformata dal dott. Andreocci (5) in un isomero che fu chiamato desmotroposantonina.

« Questo nuovo isomero riscaldato con la potassa a 200° si trasforma in un altro, che venne chiamato isodesmotroposantonina.

« I due isomeri della santonina non contengono più il CO chetonico di essa, sibbene un ossidrile fenico; conservano però il legame lattonico.

(1) Mem. d. R. Accad. d. Scienze di Torino, Serie II, t. XXXVI.

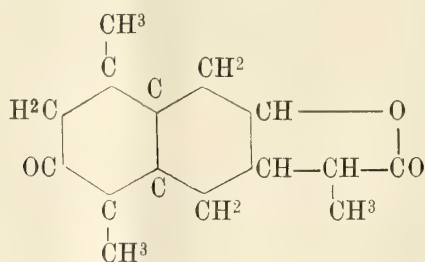
(2) Siffatte proposizioni, per $n = 1$ e risp. $r = 2$ oppure $k = 2$, dànno entrambe di nuovo il teorema dimostrato dal De Paolis nel n. 1 della Nota citata *Sulle involuzioni proiettive*.

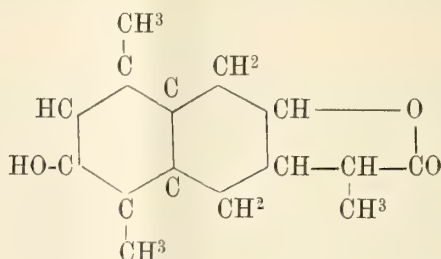
(3) Un'altra costruzione di tale iperpiano, nel caso particolare in cui tutte le varietà siano di un medesimo ordine, è stata indicata dal Brambilla (Atti della R. Accad. d. Scienze di Torino, vol. XXII).

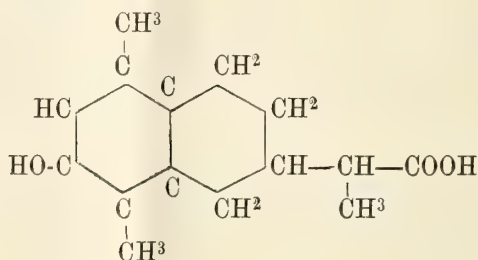
(4) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico della R. Università di Roma.

(5) A. Andreocci, *Sopra due isomeri della santonina e due nuovi isomeri dell'acido santonoso*. Gazz. chim. ital., vol. XXIII, parte 2ª, 1893.

« Per cui partendo dalla formula adottata per la santonina

```
          CH3
          |
          C       CH2
              C
H2C                 CH ——— O
                           |
OC                  CH—CH—CO
              C        |
          C       CH2  CH3
          |
          CH3
```

alle due desmotroposantonine l'Andreocci assegnò la seguente

```
          CH3
          |
          C       CH2
              C
HC                  CH ——— O
                           |
HO-C                CH—CH—CO
              C        |
          C       CH2  CH3
          |
          CH3
```

« Egli riducendole con acido acetico e polvere di zinco, ottenne gli acidi desmotropo e levosantonosi corrispondenti $C^{45} H^{20} O^{3}$; e quest'ultimo lo chiamò così perchè è lo stereoisomero dell'acido destro santonoso, già ottenuto dal Cannizzaro e Carnelutti (1). Riunendo parti uguali di acido destro e levo santonoso, ottenne il racemo che è identico all'acido isosantonoso, pure ottenuto da Cannizzaro e Carnelutti, insieme al dimetilnaftol per azione della barite sull'acido destro-santonoso. Infine l'Andreocci con una serie di reazioni appropriate, potè dimostrare che gli acidi santonosi devono tutti essere rappresentati con lo schema seguente:

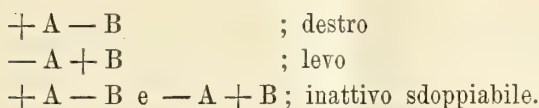
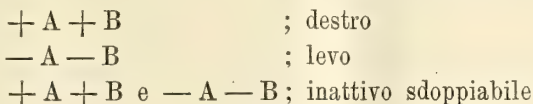
```
          CH3
          |
          C       CH2
              C
HC                  CH2

HO-C                CH—CH—COOH
              C        |
          C       CH2  CH3
          |
          CH3
```

« Dalla formula adottata per gli acidi santonosi, risultando l'asimmetria di due atomi di carbonio, secondo le teorie di J. H. van t'Hoff e J. A.

(1) S. Cannizzaro e Carnelutti, *Su due acidi isomeri santonoso ed isosantonoso* Gazz. chim. ital., vol. XIII, p. 385.

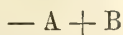
Le Bel sono possibili sei isomeri, dei quali quattro attivi due destro e due levo, e due inattivi sdoppiabili.

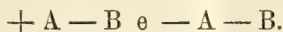
« Codesti stereoisomeri, ritenendo l'attività ottica di un carbonio che diremo A maggiore di quella dell'altro che diremo B, possiamo così rappresentarli:

$+A+B$; destro
$-A-B$; levo
$+A+B$ e $-A-B$; inattivo sdoppiabile

$+A-B$; destro
$-A+B$; levo
$+A-B$ e $-A+B$; inattivo sdoppiabile.

« Dei quali l'Andreocci ha potuto ottenere e dimostrare l'esistenza dei primi tre, cioè degli acidi destro, levo e racemo santonosi.

« In quanto all'acido desmotroposantonoso poi, egli è incerto se debba rappresentarlo così:

$$-A+B$$

oppure debba considerarlo un racemo parziale, formato dall'unione di due molecole attive, in modo che l'attività di un carbonio asimmetrico di una molecola, venga compensato da quello corrispondente dell'altra molecola, mentre si sommano le attività degli altri due atomi di carbonio, come risulta dal seguente schema:

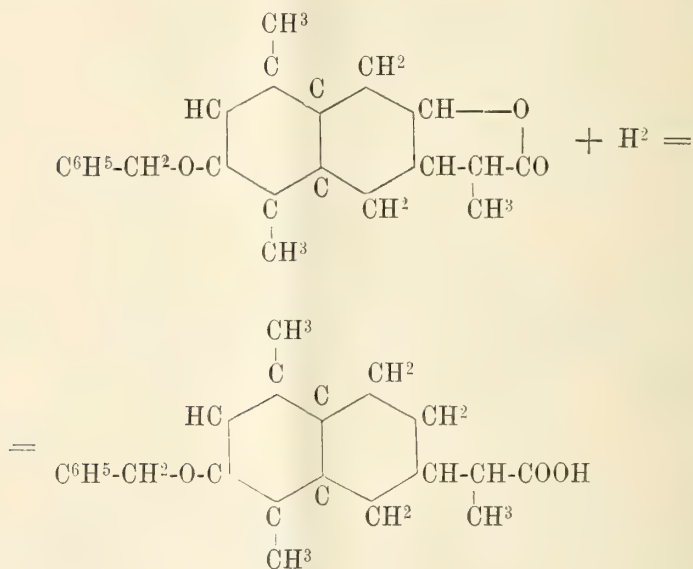
$$+A-B \text{ e } -A-B.$$

« Egli fa quest'ultima ipotesi, con la più grande riserva, e le ragioni per le quali fu condotto a farla sono le seguenti:

« I. L'acido desmotroposantonoso ed i suoi derivati sono tutti levogiri, ed il loro potere rotatorio è più basso di quello dei corrispondenti isomeri attivi.

« II. Il potere rotatorio molecolare degli acidi metil ed etil desmotroposantonosi è vicinissimo a quello dell'acido desmotroposantonoso, per non dire uguale, essendo le differenze piccolissime, tanto da potersi attribuire anche ad errori d'osservazione. Ciò sarebbe d'accordo coll'ipotesi, dappoichè i radicali alcoolici sostituenti si trovano attaccati al carbonio asimmetrico che viene compensato; mentre il potere rotatorio molecolare degli acidi metil ed etil destro e levo santonosi è maggiore di quello degli stessi acidi destro e levo santonosi. Da quanto abbiamo su detto, si vede di quanta importanza sia l'estendere lo studio su altri derivati degli acidi santonosi.

« Consigliato dal dott. Andreocci, io mi preparai la serie benzilica per vedere quale influenza avesse sul potere rotatorio molecolare l'introduzione di un radicale molto più pesante del metile e dell'etile qual'è il benzile.

« Gli acidi sostituiti, desmotropo e levo-santonosi, potendosi anche ottenere riducendo le desmotropo-santonine corrispondenti, io mi preparai dapprima la benzildesmotroposantonina e la benzil-isodesmotroposantonina. Riducendo la benzildesmotroposantonina, ottenni facilmente l'acido benzildesmotroposantonoso secondo la seguente equazione:

```
                 CH3
                  |
                  C       CH2
                      C
            HC /    \  /    \ CH——O
               |     |       |    |          + H2 =
C6H5-CH2-O-C  \    /  \    / CH-CH-CO
                      C         |
                  C       CH2   CH3
                  |
                 CH3

                 CH3
                  |
                  C       CH2
                      C
            HC /    \  /    \ CH2
=              |     |       |
C6H5-CH2-O-C  \    /  \    / CH-CH-COOH
                      C         |
                  C       CH2   CH3
                  |
                 CH3
```

« L'acido benzildesmotroposantonoso, come gli acidi metil ed etil desmotroposantonosi, ha un potere rotatorio molecolare quasi uguale a quello dell'acido desmotroposantonoso.

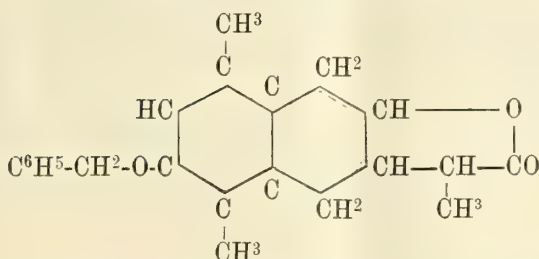
« Ho preparato gli acidi benzil levo e destro-santonosi, per vedere se in questi invece l'introduzione del benzile determinasse un notevole aumento del potere rotatorio molecolare, come fu notato per i derivati metilici ed etilici di questi due acidi stereoisomeri; però non ho potuto fare alcuna determinazione di potere rotatorio, perchè questi due acidi sono gommosi e per quanti tentativi facessi non sono riuscito a poterli cristallizzare.

« Concludendo, anche la sostituzione con il benzile dell'idrogeno fenico dell'acido desmotroposantonoso dà un derivato che ha il potere rotatorio molecolare (— 133) vicinissimo a quello dell'acido desmotroposantonoso (— 132). Non ho potuto però dimostrare, per le difficoltà sperimentali suaccennate, che invece l'introduzione del benzile negli acidi destro e levosantonoso, porti un sensibile aumento del potere rotatorio molecolare.

« Da queste mie ricerche, risulta che la seconda ipotesi fatta dall'Andreocci, sulla possibilità cioè che l'acido desmotroposantonoso sia un racemo parziale, acquista una maggiore probabilità; ma va sempre accettata con la massima riserva.

Serie benzilica.

Benzildesmotroposantonina.

```
                 CH3
                  |
                  C      CH2
                     C
          HC /         \          \ CH ——————— O
                                               |
C6H5-CH2-O-C \         /          / CH—CH—CO
                     C             |
                  C      CH2      CH3
                  |
                 CH3
```

« Gr. 20 di desmotroposantonina vennero sciolti in 200 c.m^3 d'alcool assoluto, contenente gr. 3,730 di sodio, allo stato d'alcoolato sodico, e gr. 20,560 di cloruro benzilico; ed il tutto fu tenuto per 10 giorni alla temperatura di 14°-15°. Dopo il qual tempo, il composto formatosi e depostosi cristallizzato sulle pareti del recipiente venne raccolto sul filtro; ed il filtrato, dapprima riscaldato per tre ore a bagno maria, depositò per raffreddamento bei cristalli aghiformi, che vennero pure raccolti sul filtro. Il liquido filtrato, per aggiunta di acqua e qualche goccia di acido cloridrico, precipitò una massa gialliccia che si addensò in grumi vischiosi. Questi grumi, separati per decantazione, vennero lavati con etere che disciolse la parte più resinosa, lasciando una polvere che venne raccolta ed indi lavata con etere ed acqua.

« La soluzione eterea della parte più resinosa per lento svaporamento depositò una sostanza cristallizzata in aghi, più fusibile e molto più solubile della benzildesmotroposantonina, riconosciuta più tardi per benzil-isodesmotroposantonina. La benzildesmotroposantonina pura si presenta in bei cristalli bianchi, aghiformi fondenti tra 181°-182°. È pochissimo solubile nell'alcool a freddo, discretamente a caldo; è solubile nell' etere, insolubile nell'acqua.

« L'analisi confermò la formula da noi data:

gr. 0,2625 di sostanza diedero gr. 0,7564 di CO^2 e 0,1698 di H^2O

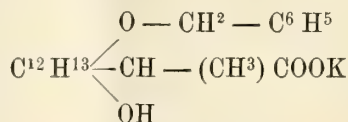
calcolato	trovato
H = 7,14	7,17
C = 78,57	78,58

« Per la pochissima solubilità di esso prodotto a freddo in tutti i solventi, i seguenti dati ottenuti da una determinazione di potere rotatorio devono essere accettati con riserva, poichè con soluzioni così diluite, l'errore è inevitabile.

Solvente		Alcool assoluto
Concentrazione per 100		0,204
Lunghezza del tubo		mm. 219,65
Deviazione per $(\alpha)_D^{18°}$	+	0,46
Potere rotatorio { specifico	+	102,6
Potere rotatorio { molecolare.	+	345.

Acido benzildesmotroposantoninico.

« La benzildesmotroposantonina si discioglie nettamente in una soluzione acquosa concentrata bollente di potassa, dando il benzildesmotroposantoninato potassico:

$$C^{12}H^{13}\begin{cases} O - CH^2 - C^6H^5 \\ -CH - (CH^3)\,COOK \\ OH \end{cases}$$

dal quale con un acido si ha l'acido benzildesmotroposantoninico, che, essendo insolubile nell'acqua, precipita.

« L'acido benzildesmotroposantoninico precipitato a freddo con un leggerissimo eccesso di acido cloridrico e rapidamente lavato con acqua, è completamente solubile nel carbonato sodico; però se si riscalda anche in seno all'acqua, si trasforma in lattone, e non è più solubile in carbonato sodico.

Benzilisodesmotroposantonina.

« Gr. 25 di isodesmotroposantonina vennero sciolti in 250 c. m.^{3} circa di alcool assoluto, contenente gr. 4,60 di sodio, e 25,70 di cloruro benzilico, e vennero riscaldati a bagno maria quasi per quattro ore.

« In seguito il liquido venne precipitato con acqua in una massa gialliccia vischiosa, che poscia solidificò in seno all' acqua stessa. Indi si estrasse con etere, nella quale una parte si sciolse, e l'altra no.

« Dopo aver portato a piccolo volume l'etere, per far cristallizzare la parte in esso disciolta, si cercò di avere questa allo stato di purezza, come anche quella rimasta indisciolta, cristallizzandole un paio di volte dall'etere stesso. Qui però osservai, che quella porzione, disciolta a freddo nell'etere, formava realmente il composto isobenzildesmotroposantonina, mentre che quella rimasta indisciolta nell'etere, dal punto di fusione e dal suo comportamento con i solventi, fu identificata per benzildesmotroposantonina. Del resto la formazione dei due isomeri avviene anche nella metilazione ed etilazione dell'isodesmotroposantonina.

« La benzil-isodesmotroposantonina cristallizza in bellissimi aghi lucenti, fondenti fra 81°-82°. È solubilissima nell'etere a freddo, solubile nell'alcool a caldo, discretamente a freddo, insolubile nell'acqua.

« All'analisi diede il seguente risultato:

gr. 0,2393 di sostanza diedero gr. 0,1563 di H^2O e gr. 0,6893 di CO^2

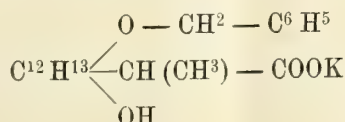
	calcolato	trovato
H =	7,14	7,25
C =	78,57	78,54

« Il potere rotatorio della benzilisodesmotroposantonina risulta dal seguente specchietto:

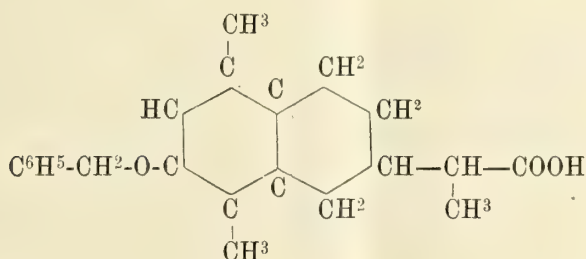
Solvente		Alcool assoluto
Concentrazione per 100		2,0872
Lunghezza del tubo		mm. 219,65
Deviazione osservata per $(\alpha)_D^{21^\circ}$		+ 6,26
Potere rotatorio	specifico	+ 136,5
	molecolare	+ 459.

Acido benzil-isodesmotroposantoninico.

« La benzilisodesmotroposantonina, come il suo isomero, si discioglie nella potassa acquosa bollente trasformandosi nel benzil-isodesmotroposantoninato potassico:

$$C^{12}H^{13}\begin{cases} O - CH^2 - C^6H^5 \\ CH(CH^3) - COOK \\ OH \end{cases}$$

che nel suo comportamento si somiglia perfettamente al benzildesmotroposantoninato potassico.

Acido benzildesmotroposantonoso.

```
                 CH3
                 |
                 C      CH2
                     C
           HC /    \ /    \ CH2
                  
 C6H5-CH2-O-C \    / \    / CH—CH—COOH
                     C         |
                 C      CH2    CH3
                 |
                 CH3
```

« Gr. 12 di benzildesmotroposantonina, sciolta a caldo a bagno maria in 500 cm^3 d'acido acetico diluito al 76 %, vennero trattati con polvere di zinco; e dopo sei ore di riscaldamento la reazione era condotta a termine. La soluzione venne filtrata a caldo, ed il filtrato si precipitò con acqua. Il precipitato ottenuto fu trattato con carbonato sodico, e si formò il sale sodico dell'acido benzildesmotroposantonoso, pochissimo solubile nell'acqua a freddo, solubile a caldo, insolubile nell'etere, solubilissimo nell'alcool, donde viene precipitato dall'etere. Cristallizza in belle laminette splendenti. A contatto dell'acido cloridrico diluito diede l'acido libero, che venne raccolto sul filtro, e poscia purificato, cristallizzandolo parecchie volte dall'alcool.

« Cristallizza in belli aghi lucenti. Fonde verso 121°-122°, prima rammollendosi.

« All'analisi:

gr. 0,2622 di sostanza diedero gr. 0,1842 di H^2O e gr. 0,7544 di CO^2

	calcolato	trovato
H =	7,69	7,80
C =	78,11	78,46

« L'acido benzildesmotroposantonoso fu anche ottenuto per azione di due molecole di cloruro benzilico e due d'alcoolato sodico, su d'una molecola di acido desmotroposantonoso, e poscia saponificando il benzildesmotroposantonito benzilico. Questo metodo non è consigliabile, perchè l'acido che si ottiene è molto impuro, e richiede una laboriosa purificazione. Il composto dibenzilico, che si presenta sotto forma di uno sciroppo giallognolo, non si potè avere cristallino in capo a due mesi.

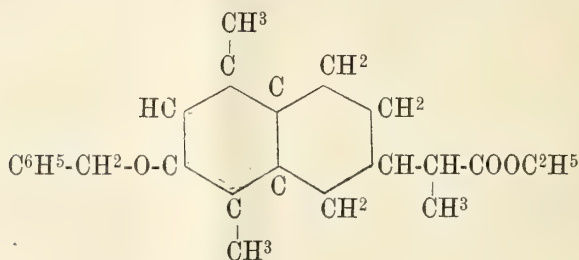
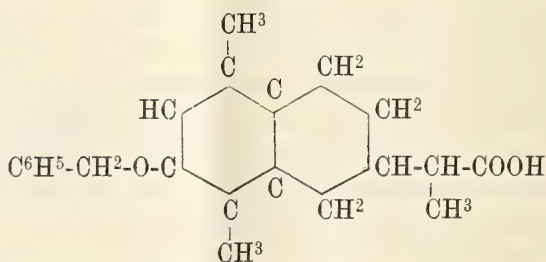
« Per un grammo di acido benzildesmotroposantonoso sciolto nell'alcool assoluto al volume di 25 cm^3, la deviazione osservata, impiegando un tubo di mm. 219,65, fu per $(\alpha)_D^{18°}$ di — 3,505, da cui si deduce che il potere rotatorio specifico è — 39,3, ed il potere rotatorio molecolare — 133.

Benzil-destrosantonitoetilico ed acido benzildestrosantonoso.

1.

```
              CH3
              |
              C      CH2
                  C
       HC              CH2

C6H5-CH2-O-C           CH-CH-COOC2H5
                  C        |
              C      CH2   CH3
              |
              CH3
```

2.

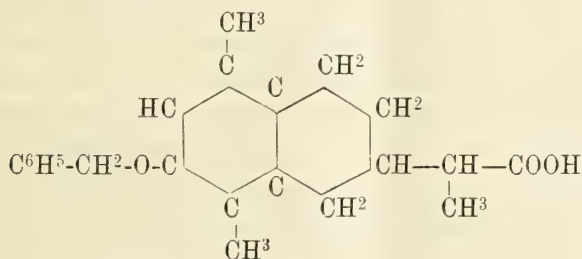
```
              CH3
              |
              C      CH2
                  C
       HC              CH2

C6H5-CH2-O-C           CH-CH-COOH
                  C        |
              C      CH2   CH3
              |
              CH3
```

« Gr. 6 di santonito etilico, vennero disciolti in alcool assoluto contenente gr. 0,5 di sodio allo stato di alcoolato sodico, e si effettuò la rea-

zione, prima a freddo, e poscia a caldo a bagno maria. Diventata limpida la soluzione, vi si aggiunse il cloruro benzilico, e si riscaldò sino a reazione finita. Il benzilsantonito etilico saponificato con potassa diede l'acido benzildestrosantonoso, che invano cercai di cristallizzare dall'etere e dalla ligroina, per quanti tentativi facessi.

« Speravo infine che con carbonato sodico formasse un sale poco solubile come l'acido benzildesmotroposantonoso, ma invece forma un sale solubilissimo. Cristallizzato in aghetti bellissimi ottenni poi il benzilsantonito etilico, dopo averlo lasciato a sè per una settimana.

« L'acido benzildestrosantonoso si presenta sotto forma di olio denso sciropposo, leggermente colorato in giallo, da impurezze che non si sono potute eliminare.

Acido benzil-levosantonoso.

CH^3
C C CH^2
HC CH^2
C^6H^5-CH^2-O-C CH—CH—COOH
C C CH^2 CH^3
CH^3

« Si ottiene riducendo la benzilisodesmotroposantonina pura con acido acetico e polvere di zinco, nelle condizioni innanzi indicate per la riduzione della benzildesmotroposantonina.

« La soluzione acetica si filtra a caldo, si precipita il filtrato con acqua in una massa gommosa bianca, solubile nei solventi, e che finora non ho potuto cristallizzare.

« Per ciò, non essendo sicuro della purezza, non ho creduto conveniente determinarne il potere rotatorio.

« Sembra però che per un prolungato riscaldamento a 100° e nel vuoto si racemizzi, perchè le sue soluzioni non hanno azione alcuna sulla luce polarizzata ».

Fisica. — *Intorno ad un pendolo a più fili, ed alla sua applicazione nella misura della gravità, negli elettrometri, galvanometri, ecc.* [1]. Nota di G. GUGLIELMO, presentata dal Socio BLASERNA.

« Il pendolo fisico ad un solo filo, il quale trova applicazione sotto varie forme e con varie forze direttrici, in molti strumenti di misura, quando viene deviato o oscilla, ruota attorno al punto fisso, cambiando direzione nello

(1) Lavoro eseguito nel gabinetto fisico dell'Università di Cagliari.

spazio. Ciò complica generalmente, e talora in grado notevolissimo, sia la legge delle deviazioni, sia quella delle oscillazioni, come apparirà manifesto nei casi considerati più oltre.

« Se invece il corpo è sospeso mediante due fili di egual lunghezza, non troppo vicini, e se la distanza dei punti d'attacco nel corpo è uguale a quella dei punti d'attacco nel sostegno, si può evitare il suddetto inconveniente. In questo caso i fili si dispongono parallelamente, così si dispone la congiungente i punti d'attacco nel corpo rispetto a quella del sostegno, ed il centro di gravità si dispone nel piano dei fili. Se ora, mediante una forza orizzontale passante pel centro di gravità e giacente nel piano dei fili, il corpo viene deviato alquanto e poi lasciato libero, esso si muove lungo un arco di cerchio, parallelamente a sè stesso, senza ruotare; poichè nel quadrilatero formato dai punti d'attacco, i lati opposti essendo uguali, devono essere anche paralleli, quindi la linea dei punti d'attacco nel corpo deve rimanere parallela a quella del sostegno che è fisso, e siccome il centro di gravità per l'ipotesi fatta deve rimanere nel piano dei fili, il corpo non cambia direzione.

« Una rotazione avrebbe luogo qualora la deviazione o l'oscillazione avvenissero secondo un piano diverso da quello dei fili, oppure quando il corpo, sotto l'azione di forze non passanti per la verticale condotta pel centro di gravità, rotasse attorno ad un asse verticale. Però entrambi questi movimenti si possono rendere impossibili (supposti i fili tesi ed inestensibili) se a ciascun filo se ne sostituiscono due *ab ac*, *a'b' a'c'*, Fig. 1, uguali o disuguali, divergenti da un punto d'attacco comune nel corpo, e che devono soddisfare alla condizione che le congiungenti i punti d'attacco di ciascuna coppia di fili adiacenti devono essere orizzontali ed inoltre perpendicolari ed equidistanti dalla congiungente i punti d'attacco nel corpo. Ossia devono essere *bc* e *bc'* orizzontali, ed inoltre perpendicolari alla *aa'* ed equidistanti da essa. Se questa condizione è verificata il corpo non può oscillare che secondo un piano, muovendosi parallelamente a sè stesso.

« Se invece il corpo è sospeso mediante tre fili di ugual lunghezza, e la distanza dei punti d'attacco nel corpo è uguale a quella dei punti d'attacco corrispondenti nel sostegno (in modo cioè che i fili siano paralleli) il corpo può oscillare secondo qualsiasi piano verticale rimanendo parallelo a sè stesso, poichè ciascuna congiungente dei punti d'attacco nel corpo deve rimaner parallela a quella corrispondente nel sostegno.

« Si può rendere la rotazione del corpo attorno ad un asse verticale, difficile ossia richiedente una forza maggiore per un determinato angolo, coll'aumentare la distanza dei fili; si può anche impedire affatto tale rotazione sostituendo ad ogni filo due fili divergenti dal corpo in un modo simile a quello indicato per il pendolo bifilare, però in tal caso l'oscillazione non può avvenire che secondo un piano determinato perpendicolare ai piani paralleli delle tre coppie di fili.

« Questi pendoli per conseguenza dell'accennata assenza di rotazione nel corpo possono essere applicati utilmente in varie determinazioni, p. e. quella della gravità, delle forze elettrostatiche, elettromagnetiche, ecc.; non ho potuto sperimentarle tutte, credo tuttavia opportuno di accennarle brevemente, insieme alle esperienze fatte su alcune di esse [1].

Determinazione della gravità.

« La legge del pendolo semplice non essendo direttamente applicabile al pendolo fisico, nel caso che si voglia fare una verificazione un po' esatta della legge del pendolo, o che si voglia determinare il valore della gravità, occorre misurare esattamente le varie dimensioni del corpo sospeso e la lunghezza del filo e dedurne la lunghezza del pendolo semplice isocrono, per via indiretta, soggetta quindi a varie cause d'errore, (fra le quali quella della mancanza d'omogeneità del corpo) che richiedono nuove misure per essere eliminate. Nel caso del pendolo reversibile, dato che si possa disporre di uno di questi, la misura delle dimensioni del corpo è soppressa, occorre tuttavia determinare esattamente la durata d'oscillazione sui due coltelli quindi un numero doppio di volte.

« Usando invece il pendolo trifilare, non occorre nè determinare le dimensioni del corpo sospeso, nè eseguire la doppia determinazione della durata d'oscillazione, ma basta determinare la lunghezza dei fili.

« Difatti il corpo muovendosi parallelamente a sè stesso, i varî punti di esso descrivono necessariamente archi di raggio uguale; quindi se supponiamo che durante l'oscillazione cessi la coesione fra questi punti, che così divengono indipendenti, ma siano costretti a muoversi senza attrito, lungo i suddetti archi, essi continueranno ad oscillare in tempi uguali ed in ugual fase (perchè era uguale la fase iniziale) ed il corpo rimarrà unito come se esistesse la coesione. Questo pendolo fisico ha dunque la stessa durata d'oscillazione di ciascuno dei pendoli semplici di cui è composto; determinata la lunghezza dei fili e la durata d'oscillazione, e facendo le correzioni per la resistenza dell'aria ecc., si potrà determinare la gravità. Una circostanza utile per la correzione relativa a quest'ultima causa d'errore è che, supposti fissi i punti d'attacco dei fili ed immutata la loro lunghezza, si può far variare comunque la forma, le dimensioni, ed il peso del corpo senza che varii la durata d'oscillazione.

[1] Sebbene una proprietà così semplice non si possa ritenere come ignota, pure ricercando nei libri e periodici più ricchi di indicazioni non ho trovato che ne sia stata fatta qualche applicazione. Anzi non ne ho trovato altri cenni che quello di R. Hoppe (Archiv. für Math. und Physik) il quale avendo stabilito le formule complicate relative all'oscillazione di un corpo sospeso per due punti fissi al corpo a due punti fissi nello spazio, osserva che nel caso che i fili siano uguali e pure uguali le distanze dei punti fissi nel corpo e nello spazio, il moto è progressivo e la legge è quella del pendolo semplice avente un filo d'ugual lunghezza.

« Ho eseguito alcune esperienze per verificare come funziona questo pendolo, e gl'inconvenienti che può presentare. In due lamine triangolari equilatere, d'ottone, di 150 mm. di lato e 3 di spessore, ho fatto praticare agli angoli, mentre esse combaciavano, tre forellini equidistanti in entrambe, per i quali passavano i tre fili di sospensione; una di queste lamine era fissata ad un solido sostegno, l'altra era sospesa mediante i tre fili. Questi erano di ferro, di 0,1 mm. di diametro, però all'estremità terminavano in fili di seta (che serrati nel compasso di spessore erano spessi 0,1 mm.) che rimanevano liberi per circa 1 mm. fra il filo di ferro e la lamina d'ottone; in tal modo i fili avevano la flessibilità della seta e la poca estensibilità del ferro. Impedivo il giuoco dei fili di seta entro i rispettivi fori, introducendo a forza in ciascuno di questi un pezzetto di filo di rame, lungo quanto lo spessore della lamina e colle estremità piane, avendo cura che le due estremità di ciascun filo di sospensione si trovassero serrate dalla stessa parte dei rispettivi fori.

« Si obbietta all'uso dei fili che, a causa della loro imperfetta flessibilità, è incerto quale sia in realtà l'asse di rotazione del pendolo. Credo che nel caso di fili di seta non troppo spessi si possa ritenere che tale asse giaccia nel piano della lamina o pinzetta dove il filo comincia ad esser libero: non pare ammissibile che un simile fil di seta ben teso, nel caso di piccole oscillazioni formi una curva di raggio sensibile. Se il corpo sospeso fosse molto pesante, si potrà usare invece d'un solo filo, un fascio di fili sottili disposti in un piano perpendicolare al piano d'oscillazione. Occorre inoltre che il filo o il fascio di fili di seta siano serrati in una pinzetta ben costruita, in modo che le superfici che serrano il filo terminino dalla parte libera di esso con spigoli vivi e coincidenti quando la pinzetta è serrata.

« Ottenevo che i fili fossero esattamente di ugual lunghezza, rendendo prima orizzontale la faccia inferiore della lamina fissa, e tirando in un senso o nell'altro i fili, prima di fissarli definitivamente, in modo che la faccia superiore della lamina mobile fosse orizzontale, e si mantenesse tale anche se deviata mediante un filo orizzontale. Con questo pendolo costruito semplicemente e per tentativi, non potevo eseguire determinazioni esatte, anche per mancanza d'un cronometro; mi contentai di verificare con un orologio da tasca che la durata d'oscillazione rimaneva invariata, quando fissavo rigidamente un peso di 1 chilogr. 20 a 30 cm. al di sopra e al disotto della lamina mobile. Esperienze accurate eseguirò in seguito, se potrò procurarmi un cronometro e se le altre occupazioni, e l'assoluta mancanza di aiuto, me lo permetteranno.

Elettrometro assoluto a indicazioni continue.

« Un caso in cui è essenzialmente importante che il corpo deviato non cambi direzione nello spazio, è quello della misura delle forze elettriche, poichè cambiando tale direzione, cambia altresì la distribuzione dell'elettricità

in modo spesso impossibile a determinare, per cui la relazione fra le forze e i potenziali e le deviazioni prodotte diventa complicatissima e ignota.

« Gli elettrometri attualmente in uso ovviano in varî modi a questo inconveniente; esso può essere evitato vantaggiosamente coll'uso del pendolo bifilare suaccennato, ed in tal modo è possibile costruire molto facilmente un buon elettrometro assoluto. Quello da me costruito era composto nel modo seguente.

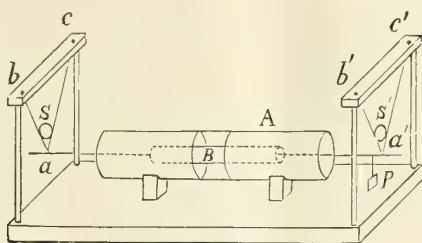



Fig. 1.

« Un tubo di vetro cilindrico A, di 5 cm. di diametro e 25 di lunghezza, (un tubo da lampada a gaz) orizzontale, fissato con ceralacca a una tavoletta, era ricoperto internamente di stagnola fino a 5 mm. dal mezzo, e l'intervallo di vetro nudo era ricoperto da uno strato di ceralacca in cui erano immersi gli orli interni delle stagnole (siccome è difficile trovare tubi di vetro ben cilindrici, è preferibile di sostituire alla stagnola, lamine di zinco che si possono rendere ben cilindriche, tenute assieme con un corto tubo di vetro o con appositi sostegni). Un tubo metallico B, preferibilmente di alluminio, di 2 cm. di diametro e 13 di lunghezza, turato alle estremità da dischi di sovero, i quali sono attraversati nel mezzo da un filo d'alluminio aa' ben diritto, spesso 2 mm., lungo 30 cm. (oppure da un tubo di vetro sottile ricoperto di stagnola) era contenuto nell'interno del tubo A, coassialmente e simmetricamente rispetto ai due cilindri di stagnola. Perciò ciascuna estremità del filo d'alluminio era sospesa a due fili divergenti bac, $b'a'c'$, perpendicolari ad esso e fissati ad ugual altezza all'orlo del tubo o ad una tavola orizzontale bc, $b'c'$, collocata sopra al tubo e fissata ad esso, o sostenuta da appositi piedi. Sui due fili, a circa 1 cm. dal vertice era incollato un leggero specchietto S dinanzi al quale era collocata una scala verticale e un cannocchiale, nel quale si vede per riflessione l'immagine della scala. Finalmente da una estremità del filo d'alluminio scendeva un filo verticale, sottile ma rigido, che terminava in una paletta P perpendicolare all'asse dei tubi, di circa 1 cm. di lato, che era totalmente immersa nell'acqua e serviva a smorzare le oscillazioni e stabilire la comunicazione col tubo d'alluminio. Se ora questo tubo ed una delle stagnole trovasi a potenziale zero e l'altra a potenziale V, esso sarà sottoposto a una forza orizzontale F ed i fili del pendolo e lo specchietto saranno deviati

d'un angolo α e F sarà $= V^2/4\, l_n(R/r) - V^2/4\, l_n(R/\varrho) = P\alpha$ esssendo R, r e ϱ i raggi dei tubi di stagnola e del tubo e filo d'alluminio, e P il peso di questi ultimi (1). Per V $= 20$ unità elettrostatiche e P $= 10$ gr. sarà F $= 0{,}1$ gr. ed $\alpha = 0{,}01$. Con cannocchiale e scala a distanza di 2 m. dallo specchio s'osserverà una deviazione di 40 mm. nella quale si potranno apprezzare almeno i decimi di millimetro. Esperienze approssimative fatte con questo elettrometro, diedero un discreto accordo fra i valori indicati da esso e quelli dedotti dalla distanza esplosiva fra sfere di 14 mm. di diametro.

« Per disporre esattamente il cilindro centrale è comodo preparare due mezzi dischi di legno con un mezzo foro concentrico, che s'adattino esattamente fra i cilindri esterni e l'interno quando gli assi di questi coincidono; tirando o lasciando scorrere i fili di seta, si regola la loro lunghezza in modo che il cilindro interno non cambi sensibilmente posizione quando i mezzi dischi vengon rimossi. Occorre però che l'asse del filo d'alluminio coincida con quello del tubo che questo sopporta, o almeno che le estremità di esso filo distino poco, ugualmente e dalla stessa parte, dalla posizione esatta.

« Lo specchietto deve essere leggerissimo, altrimenti occorre collocarne un'altro, o un disco qualsiasi d'ugual peso, alla stessa altezza nell'altra coppia di fili, perchè così l'angolo che esso origina tra la parte superiore ed inferiore dei fili è lo stesso in entrambe le coppie; occorrerà inoltre prendere per P il peso di tutta la parte che trovasi sospesa cominciando dagli specchi, cioè specchi, fili sottostanti, astina e tubo. Occorre inoltre difenderlo con uno schermo dalle azioni elettriche.

« Il valore di α non dipende dalla lunghezza dei fili; ho usato con uguali risultati fili di 3 cm. e di 30 cm. di lunghezza; i primi devono essere molto flessibili, p. es. di bozzolo ed allora sono molto soggetti a rompersi e un poco difficili a fissare. Usando fili molto lunghi p. es. 1 metro o meglio 5 o più (fissandoli in questo caso al soffitto) gli spostamenti del cilindro interno potrebbero essere osservati senza far uso di specchio, direttamente, oppure con un microscopio semplice. Non ho fatto esperienze con fili così lunghi; osserverò solo che essi, dovendo essere inestensibili, dovranno essere di ferro o altro metallo ben rettilinei anche per un piccolo peso, e potranno essere resi flessibili con un corto tratto di filo di seta alle estremità. Lo spostamento ver-

(1) Il secondo termine con ϱ sparisce se si sopprime il filo aa' quasi interamente, lasciandone solo un corto tratto e fissando i fili di sospensione nell'interno e verso la metà dei cilindri di stagnola o di zinco.

Mascart e Joubert nel loro trattato di elettricità e magnetismo, per stabilire la teoria degli elettrometri a quadranti, considerano il caso di tre cilindri disposti come nella fig. 1.

Bichat e Blondot, *Comptes rendus* 1885, hanno realizzato questo elettrometro teorico applicandolo alla misura dei potenziali elevati.

L'elettrometro sopra descritto dà un altro modo più semplice di realizzare l'elettrometro teorico suddetto.

ticale si potrà compensare sollevando i cilindri esterni, oppure si potrà fare la relativa correzione, che è molto piccola.

« Questo pendolo diretto dalla gravità sarebbe troppo poco sensibile per potenziali intorno a 1000 Volts o meno, nel qual caso la deviazione riescirebbe appena percettibile anche coll'aiuto dello specchio e cannocchiale; potremo però ottenere deviazioni notevoli anche per potenziali molto piccoli, sostituendo alla gravità la torsione di due fili. L'apparecchio, che può servire anche ad altre misure e che si può facilmente costruire, è il seguente.

« In un rettangolo verticale formato di aste di legno lunghe p. es. 50 cm. e fissato su un tavolo sono tesi 2 fili verticali di packfong M ed N distanti p. es. 30 cm. a ciascuno dei quali è fissata nel mezzo un'astina orizzontale, lunga per es. 6 cm. o più perpendicolare al piano dei fili. Alle estremità, rivolte dalla stessa parte, di queste sono sospesi l'astina e il tubo d'alluminio suddetti mediante due corti fili singoli di seta, e si equilibrano con contrappesi le estremità opposte delle astine. In queste condizioni il tubo suddetto spostandosi non ha da vincere che la debole torsione dei fili, e quando si trovi nell'interno del tubo A e siano stabilite le comunicazioni nel modo già indicato, sarà deviato notevolmente per potenziali poco elevati. La sensibilità potrà essere aumentata o diminuita coll'uso di fili la cui forza di torsione sia più o meno debole. Se le forze da misurare sono molto piccole, si possono fissare i fili di torsione solo alla parte superiore, sopprimendo la parte inferiore di essi.

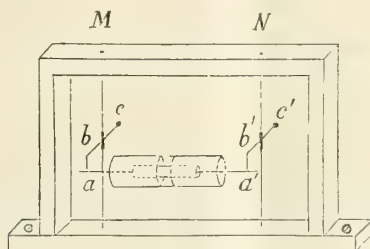



Fig. 2.

« È da notare che qualora il filo di torsione fisso ad entrambe le estremità, non sia esattamente verticale e il centro di gravità dell'astina si trovi fuori dell'asse di rotazione, esso centro oscillando descrive un cerchio inclinato sull'orizzonte ed è quindi soggetto oltre che alla torsione, alla componente della gravità nel piano del cerchio. Questa forza direttrice può essere aumentata o diminuita, aumentando o diminuendo la distanza del centro di gravità dell'astina dal filo, e l'inclinazione di questo; si ha in tal caso una specie di pendolo di Henkel e Zöllner di cui si calcola facilmente la forza direttrice, e che può esser utile per aumentare o diminuire la sensibilità.

« Il pendolo suddescritto diretto dalla gravità o dalla torsione può essere applicato alla misura dei potenziali mediante l'attrazione fra dischi. Si

può sopprimere il tubo A, sostituire all'astina col tubo B un'astina comunicante col suolo nello stesso modo e portante ad un'estremità un disco metallico, p. es. di 5 cm., di diametro perpendicolare ad essa.

« Collocando nel piano del disco l'anello di guardia comunicante col suolo e di fronte ad essi parallellamente e a distanza nota, un disco a potenziale costante V, si potrebbe dallo spostamento del disco dedurre il valore di V. Occorre però ridurre l'anello di guardia nel piano del disco spostato per l'azione elettrica, e misurare nuovamente la distanza di questo dal disco elettrizzato, e quindi questo elettrometro non sarebbe a indicazioni continue, fuorchè nel caso di spostamenti molto piccoli pei quali si potrebbe trascurare la differenza tra i piani del disco mobile e dell'anello, e tener conto della piccola variazione di distanza dall'altro disco.

Applicazione ai galvanometri.

« Nel caso dei galvanometri l'uso della sospensione parallela non è così utile come negli elettrometri. Tuttavia essa presenta i seguenti vantaggi non del tutto trascurabili. 1° Completa astasìa e possibilità di orientare comunque il galvanometro, ed anche non orizzontalmente. 2°. Possibilità di aumentare la distanza dei rocchetti, percorsi dalla corrente, dall'asse di rotazione e di aumentare quindi il momento che si deve misurare. 3°. Possibilità di usar rocchetti di diametro molto piccolo, i quali producono con minor quantità di filo e minor resistenza un campo magnetico d'intensità uguale a quello dei rocchetti di maggior diametro, e con ugual quantità di filo un campo più intenso.

« A seconda della sensibilità voluta si può, collo stesso magnete e gli stessi rocchetti, usare come forza direttrice la gravità o la torsione. Nel primo caso non si ha che da sostituire ai due cilindri di stagnola dell'elettrometro della fig. 1, due rocchetti di piccolo diametro, ed al tubo centrale B un ago magnetizzato disposto simmetricamente rispetto ai rocchetti; e si potrà diminuire la sensibilità sospendendo all'ago pesi convenienti. Volendo maggiore sensibilità si potrà appendere l'ago all'estremità delle astine fisse ai fili di torsione della fig. 2; in questo caso è inutile che questi siano fissi alla parte inferiore, a meno che non si voglia far uso della componente della gravità rendendoli obliqui.

« Collocando i due rocchetti uno sull'altro e sostituendo all'ago magnetico un filo di ferro dolce piegato ad ⊐ sospeso nello stesso modo, le cui estremità giungano fin verso la metà dei rocchetti, esso, come avviene nell'elettro-dinamometro Bellati e nell'amperometro Hummel, verrà magnetizzato e attirato nell'interno dei rocchetti per effetto della corrente, qualunque sia il senso di questa. Oltre i vantaggi suaccennati, questa disposizione avrebbe anche quello che il filo trovasi in tutta la sua estensione in un campo magnetico

uniforme (supposto che la corrente circoli anche attorno alla parte curva del filo di ferro) e che lo spostamento del filo di ferro parallelamente a sè stesso non cambia la distribuzione del magnetismo in esso. L'esperienza e uno studio ulteriore dimostreranno quali siano le condizioni più favorevoli, e se sia possibile con un simile apparecchio la misura assoluta dell'intensità della corrente, essendo nota la permeabilità del ferro e viceversa.

Applicazione alla misura della pressione del vento.

« L'anemometro di Wild consiste di una lamina rettangolare verticale sospesa in due punti del lato superiore che è orizzontale, la quale sotto l'azione del vento s'inclina più o meno sulla verticale; un'apposita larga ventaruola perpendicolare alla lamina suddetta la dirige perpendicolarmente al vento. Ora variando l'inclinazione della lamina, varia l'incidenza del vento su di essa e quindi la pressione esercitata; se il vento fosse eccezionalmente costante si potrebbe con contrappesi ridurre sempre la lamina nel piano verticale; però tale necessaria costanza del vento non si verifica.

« Sospendendo invece a due coppie di fili ad angolo *bac*, *b'a'c'* un'asta, orizzontale terminante a un' estremità con un disco verticale perpendicolare all'asta, e sottoponendo il disco all'azione del vento (orientandolo perpendicolarmente ad esso nel modo già indicato) esso sarà spostato ed i fili del pendolo devieranno di α, ma il disco rimarrà verticale e l'angolo d'incidenza del vento rimarrà immutato qualunque sia la direzione del vento. Quindi se s è l'area del disco, P il suo peso coll'asta che lo sostiene, la pressione del vento sarà $F = P \operatorname{tg} \alpha : s$ per cm.². Usando dischi di vario diametro o, piuttosto, facendo uso di anelli di guardia come nell'elettrometro di lord Kelvin, si potrà determinare l'influenza degli orli, e disponendo il disco sotto varie inclinazioni si potrà determinare l' infiuenza dell'angolo della direzione del vento colla lamina. Tale apparecchio molto semplice potrebbe essere un utile verificatore degli anemometri a molinello. Si potranno smorzare le oscillazioni fissando all'asta un filo verticale diretto in basso e terminante in una paletta totalmente immersa nell'acqua ».

Anatomia. — *Sulla struttura del tessuto osseo.* Nota di Ludovico Petraroja di Vincenzo, presentata dal Socio Trinchese.

« Le numerose preparazioni di tessuto osseo, da me eseguite per mia istruzione, dimostrano chiaramente che la sostanza fondamentale di questo tessuto non è formata di *lamelle*, quali *omogenee*, quali *striate*, come si crede comunemente; ma si mostra ovunque omogenea, tra gl'innumerevoli osteoplasti e canalicoli primitivi, che vi sono scavati ed ordinariamente disposti con

ordine ammirevole intorno ai focolai nutritivi dell'osso (fig. I — SHT, SHT_1).

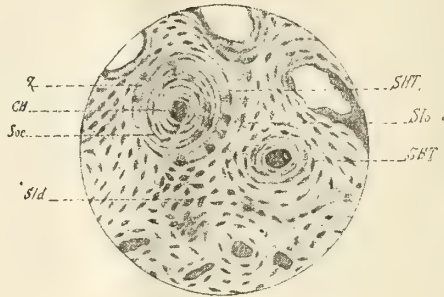



Fig. I. — (*Sezione trasversale del frontale di un uomo adulto*). — Soc, serie osteoplasta-canalicolari disposte concentricamente intorno al canalino di Havers in sezione trasversale CH e limitanti con il loro decorso le zone Z. — SHT, SHT_1 sistemi di Havers in sezione trasversale. — SIo, SId, sistemi intermediarî, (ingr. 70).

« Se si osserva ad un forte ingrandimento il *sistema di Havers* SHT_1 tagliato trasversalmente, si vedono dei cerchi concentrici (fig. II — Soc_1, Soc_2, Soc_3, Soc_4, Soc_5), ciascuno dei quali è formato di canalicoli primitivi relati-

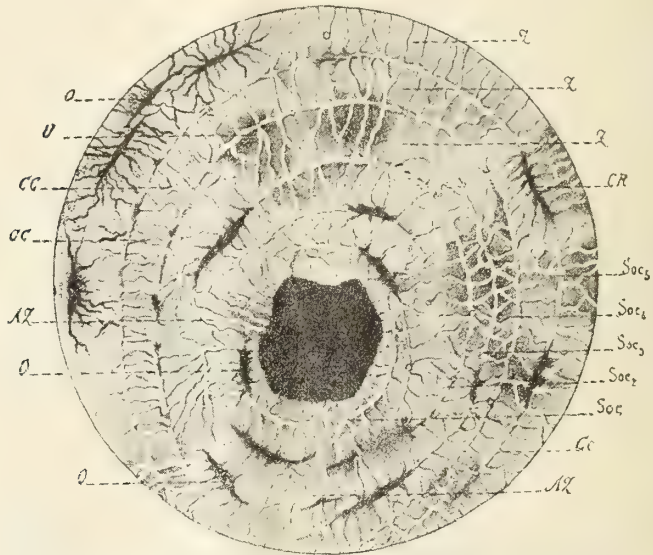



Fig. II. — (*Il sistema di Havers* SHT_1 *della fig. precedente, ingr. 790*). — Soc_1-Soc_5, serie osteoplasta-canalicolari che limitano con il loro decorso le zone Z, Z, Z. e che comunicano fra loro per i canalicoli affluenti CC. — Cc, porzione di una serie, che mette in comunicazione due osteoplasti prossimi (*canalicolo congiuntivo*). — O, O, O, osteoplasti situati lungo le serie. — CR, avanzo di un osteoplasta asportato in gran parte per la riduzione del taglio osseo sulla pietra (*confluente lacunale di Ranvier*). — U, ombre appartenenti agli osteoplasti del sistema sottoposto. — AZ, AZ, aree in cui le zone mancano per l'arresto o per l'assenza delle serie.

vamente grossi e situati sul medesimo piano, i quali si uniscono agli osteoplasti O, O, CR che incontrano sul loro tragitto formando un insieme che denominerò: *serie osteoplasta-canalicolare*. Le serie osteoplasta-canalicolari limitano dei tratti di sostanza fondamentale Z, Z, Z, traversati da fini canalicoli che le uniscono CC, CC. Questi tratti denominerò *zone* e i canalicoli che li traversano, *affluenti*. Naturalmente, nelle sezioni longitudinali dei sistemi di Havers o di altri, le serie osteoplasta-canalicolari non formano dei cerchi, ma delle linee diritte, parallele fra loro.

« In certe varietà di tessuto osseo (fig. III) vi sono dei tratti abbastanza

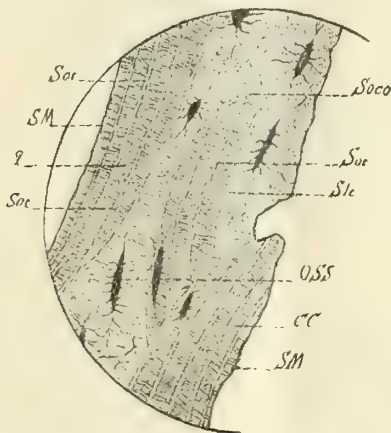



Fig. III. — (*Trabecola di tessuto spugnoso di un femore di bue*). — SM, SM, sistemi di canalicoli periercolari. — Soco, serie che si ricurva sulle altre e le arresta. — OSS, osteoplasta appartenente al sistema di canalicoli sottoposto. — SIo, sistema di canalicoli intermediario. — Z, zone. — CC, canalicoli affluenti (ingr. 535).

considerevoli, nei quali non si trovano osteoplasti, ma soltanto serie di canalicoli Soc, Soco, e canalicoli affluenti, CC, che traversano le zone Z. Queste serie e queste zone simulano assai bene le lamelle degli autori.

« Gl'istologi, secondo le mie osservazioni, avrebbero preso per sostanza fondamentale ossea le immagini delle serie osteoplasta-canalicolari e dei canalicoli affluenti, veduti in condizioni di luce, che non permettono all'osservatore di riconoscerne la vera natura.

« Queste condizioni sono: l'eccessiva sottigliezza delle sezioni di osso prese in esame o la grande trasparenza di sezioni mediocremente spesse immerse nel balsamo del Canadá o nella glicerina. In queste condizioni, le serie osteoplasta-canalicolari e i canalicoli affluenti sono irriconoscibili, e la sostanza fondamentale sembra formata di lamelle omogenee, che si alternano con lamelle striate.

« È per lo meno singolare che gl'istologi non abbiano cercato di rendersi conto esatto di queste apparenze, confrontandole con ciò che si vede nelle preparazioni a secco. Se lo avessero fatto, si sarebbero facilmente convinti

che le così dette *lamelle omogenee* delle preparazioni immerse nel balsamo, sono le serie osteoplasta-canalicolari delle preparazioni a secco, e che le *lamelle striate* delle prime sono le *zone* traversate dai canalicoli affluenti delle seconde. Ciò è tanto vero, che tutte le sezioni di osso, le quali, osservate a secco, non presentano serie osteoplasta-canalicolari, nè zone, nè canalicoli affluenti, ma soltanto osteoplasti e canalicoli primitivi in disordine, non mostrano traccia di lamelle, nemmeno dopo che sono state immerse nel balsamo del Canadà (fig. IV).

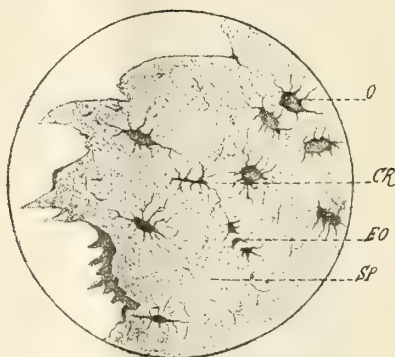



Fig. IV. — (*Tavolato esterno del parietale di un uomo adulto*). — O, osteoplasti e canalicoli primitivi disposti senza ordine. — CR, come nella figura II. — EO, avanzi di osteoplasti asportati in gran parte dalla riduzione del taglio osseo sulla pietra. — SF, sostanza fondamentale ossea, in cui non si osserva traccia di lamelle per l'assenza di sistemi di canalicoli (ingr. 535).

« V'è ancora di più. Esaminando sezioni di osso a secco mediocremente sottili e spostando l'obbiettivo con precauzione, la trasformazione delle serie osteoplasta-canalicolari e delle zone in lamelle omogenee e striate, si compie sotto gli occhi dell'osservatore. Infatti, mettendo al fuoco dell'obbiettivo una di queste sezioni (fig. V), si vedono nettamente le serie osteoplasta-canalico-

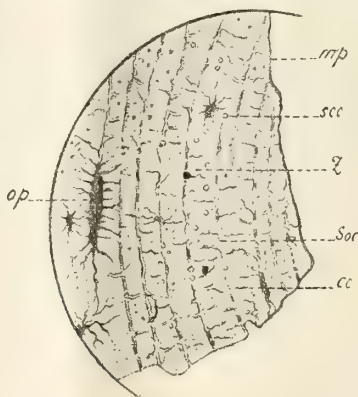



Fig. V. — (*Trabecola della diploe di un frontale d'uomo adulto a 790 diametri*). — scc, sezioni trasverse di canalicoli primitivi. — mp, margine del preparato a punto. — op, osteoplasta a punto. — Le altre lettere come nelle figure precedenti.

lari Soc e le zone Z traversate dai canalicoli affluenti CC. Se si abbassa l'obbiettivo (fig. VI), le serie osteoplasta-canalicolari prendono l'aspetto delle lamelle omogenee (fo) e le zone con i canalicoli affluenti quello delle lamelle striate (fs): la sostanza fondamentale simula le strie oscure, ed i canalicoli affluenti che la traversano, simulano i così detti *ponti* di sostanza omogenea, che unirebbero, secondo gli autori, due lamelle omogenee prossime.

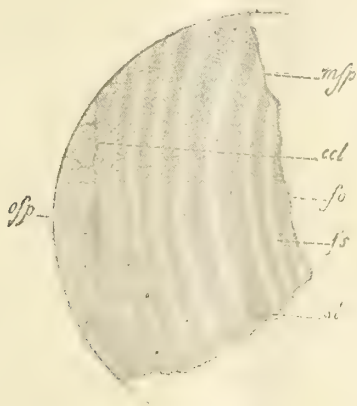



Fig. VI. — (*Il preparato precedente fuori punto*). — fo, serie osteoplasta-canalicolari che appariscono come lamelle omogenee. — fs, zone che appariscono come strie oscure. — st, canalicoli affluenti che prendono l'aspetto di strie chiare. — mpf, margine del preparato fuori punto. — opf, osteoplasta fuori punto. — cct, canalicolo congiuntivo che non appartiene al sistema in esame.

« Questi fenomeni ottici, che ci fanno assistere al graduale passaggio dai sistemi di canalicoli a quelli di lamelle, dimostrano, insieme agli altri fatti, che la sostanza fondamentale ossea non è costituita di lamelle. Tali fenomeni si osservano soltanto nelle preparazioni a secco di mediocre sottigliezza: in quelle molto sottili o immerse nel balsamo, i canalicoli spariscono quasi tutti e restano le sole apparenze lamellari. La maggiore trasparenza, infatti, che la sottigliezza o le sostanze molto rifrangenti dànno alle preparazioni, va a beneficio di tali apparenze ed è una delle ragioni, per cui i sistemi di lamelle appariscono in questi casi senza spostamento sensibile dell'obbiettivo.

« Resterebbe solo, in favore dell'esistenza delle lamelle, l'opinione di qualche istologo, secondo la quale la sostanza fondamentale dell'osso sarebbe formata di due sostanze per costituzione fisica diverse: una isotropa, l'altra anisotropa. Ma per quanto io abbia cercato, non mi è riuscito trovarvi traccia di quest'ultima, tutta la sostanza fondamentale essendo isotropa.

« Dopo i fatti esposti di sopra, le espressioni: *sistema sottoperiosteo e perimidollare, sistemi di Havers e intermediari,* potranno mantenersi nella descrizione della struttura delle ossa, ma dovranno riferirsi alle serie osteo-

plasta-canalicolari e non già a lamelle di sostanza fondamentale, che non esistono realmente. Le serie osteoplasta-canalicolari corrispondono per numero, per sito e per disposizione, alle lamelle omogenee degli autori e limitano le zone, che non sono sezioni di lamelle, ma l'aspetto preso dalla sostanza fondamentale per il regolare decorso delle serie stesse: ond'è che dove queste si arrestano o mancano le zone non esistono (fig. II — AZ, AZ) ».

P. B.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 17 novembre 1895.

F. Brioschi Presidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Fisica matematica. — *A proposito di una nuova ricerca del prof. Carlo Neumann.* Nota del Socio E. Beltrami.

« In un recentissimo libro dell'infaticabile prof. Carlo Neumann, intitolato: *Allgemeine Untersuchungen über das Newton'sche Princip der Fernwirkungen, mit besonderer Rücksicht auf die elektrischen Wirkungen* (Leipzig, Teubner, 1896), l'eminente autore, guidato da considerazioni di grande interesse e degne del più serio esame da parte dei cultori delle meccaniche discipline, ha intrapreso lo studio d'un nuovo potenziale elementare della forma:

$$\frac{\Sigma\, \mathrm{A}\, e^{-\alpha r}}{r}\,,$$

il quale si troverebbe soddisfare, sotto certe limitazioni riguardanti le costanti A, α, alle condizioni essenziali dell'equilibrio elettrico (fin qui credute comunemente soddisfatte dal solo potenziale newtoniano).

« Gli svariati svolgimenti dati sull'argomento dal prof. Neumann, colla consueta abilità e limpidezza, sono diretti in parte alla deduzione delle proprietà caratteristiche delle nuove funzioni potenziali, in parte al raffronto della teoria classica con quella che risulta dall'uso di queste funzioni ed in parte, finalmente, ad alcune altre importanti questioni, più o meno strettamente connesse col soggetto principale. Tanto le premesse fondamentali, quanto questi loro molteplici svolgimenti daranno ampia materia di ponderazione e di studio ai matematici ed ai fisici, ai quali l'autore

stesso addita già qualche punto meritevole d'indagine più sottile. Fin d'ora tuttavia mi permetto di presentare alcune semplici osservazioni intorno ad uno dei teoremi caratteristici per le nuove funzioni potenziali, intorno a quello, cioè, che fa in tal qual modo riscontro al teorema di Poisson; e ciò per rilevare il suo collegamento con un teorema generale, già da me stabilito (seguendo un altro ordine di ricerche) in una Nota del 1892 *Sull'espressione analitica del principio di Huygens*, inserita nei Rendiconti di questa R. Accademia. Del quale teorema è caso particolare un altro che era stato ancora prima da me dedotto, in un lavoro del 1887 *Intorno ad alcuni problemi di propagazione del calore*, inserito nelle Memorie della R. Accademia di Bologna; egli è anzi questo caso particolare che viene più direttamente in acconcio per l'applicazione alla legge esponenziale neumanniana.

« Il primo ed il più generale dei due teoremi cui alludo (Nota del 1892) è il seguente. Ponendo:

$$U = \int K(\xi, \eta, \zeta, r) \frac{dS}{r}, \tag{1}$$

dove S è un qualunque spazio, luogo dei punti (ξ, η, ζ), e dove r è la distanza dell'elemento dS da un punto arbitrario (x, y, z), si ha:

$$\Delta_2 U = \int \frac{\partial^2 K}{\partial r^2} \frac{dS}{r} - 4\pi K(x, y, z, 0), \tag{1$_a$}$$

dove:

$$\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{1$_b$}$$

La funzione K, delle coordinate e del raggio vettore, deve naturalmente supporsi dotata delle proprietà necessarie perchè le formole precedenti abbiano un significato; essa si suppone *nulla* al di fuori dello spazio S (ed è perciò che nell'ultimo termine dell'equazione $(1)_a$ è stato sostituito, come più comodo, il fattore 4π al fattore (σ) della citata Nota).

« Se, in particolare, si attribuisce a questa funzione K la forma:

$$K(\xi, \eta, \zeta, r) = k(\xi, \eta, \zeta) \cdot \psi(r),$$

le equazioni (1), $(1)_a$ diventano rispettivamente:

$$V = \int k(\xi, \eta, \zeta) \frac{\psi(r)\, dS}{r}, \tag{2}$$

$$\Delta_2 V = \int \psi''(r) \frac{k\, dS}{r} - 4\pi k(x, y, z) \cdot \psi(0) \tag{2$_a$}$$

e contengono il teorema più speciale che era già stato dedotto nel § 1 del-

l'altra citata Memoria del 1887. È manifesto che l'espressione (2) non è altro che quella della funzione potenziale di spazio che nasce da un potenziale elementare (fra due unità di massa) della forma:

$$\frac{\psi(r)}{r};$$

che corrisponde, cioè, ad una legge *arbitraria* d'azione a distanza (salvo le restrizioni naturali testè accennate), legge che comprende come caso particolare quella considerata dal prof. Neumann.

« Ed effettivamente se si suppone, in primo luogo, che la funzione $\psi(r)$ soddisfaccia all'equazione differenziale:

$$\psi'' = \alpha^2 \psi,$$

dove α è una costante, l'equazione $(2)_a$ si riduce senz'altro a:

$$\Delta_2 V = \alpha^2 V - 4\pi k \psi(0),$$

coincidendo esattamente con quella che il prof. Neumann stabilisce, mediante un calcolo più minuto, per il caso in cui si abbia:

$$\psi = A e^{-\alpha r},$$

cioè per quella special legge d'azione:

$$\frac{A e^{-\alpha r}}{r}$$

ch'egli designa col nome di legge esponenziale *monomia*.

« Ma lo stesso teorema $(2)_a$ si presta molto opportunamente anche alla deduzione della assai più complessa formola neumanniana che corrisponde alla legge esponenziale *polinomia*. Giova a tal fine mutare lievemente la segnatura, sostituendo il simbolo d'operazione ∇ al precedente simbolo Δ_2, e scrivendo ∇_2, ∇_3, ecc. per indicare le successive *iterazioni* dell'operazione ∇, cioè dell'originaria operazione $(1)_b$. In tal modo si ottiene la seguente successione d'equazioni, dove $\psi_0^{(n)}$ rappresenta il valore, per $r = 0$, della derivata n esima di $\psi(r)$:

$$V = \int \psi \frac{k\,dS}{r},$$

$$\nabla V = \int \psi^{II} \frac{k\,dS}{r} - 4\pi \psi_0 k,$$

$$\nabla_2 V = \int \psi^{IV} \frac{k\,dS}{r} - 4\pi \psi_0 \nabla k - 4\pi \psi_0'' k,$$

$$\nabla_3 V = \int \psi^{VI} \frac{k\,dS}{r} - 4\pi \psi_0 \nabla_2 k - 4\pi \psi_0'' \nabla k - 4\pi \psi_0^{IV} k,$$

. . . .

« Suppongasi ora che la funzione $\psi(r)$ soddisfaccia all' equazione differenziale omogenea a coefficienti costanti:

$$(3) \qquad \psi^{(2n)} + c_1\psi^{(2n-2)} + c_2\psi^{(2n-4)} + \cdots + c_{n-1}\psi'' + c_n\psi = 0$$

e s'immagini protratta la serie delle antecedenti equazioni fino alla $(n+1)$esima. Facendo la somma di tutte queste equazioni, dopo averle ordinatamente moltiplicate per i fattori costanti $c_n, c_{n-1}, \ldots c_1, 1$, si ottiene, con riguardo a (3), il risultato seguente:

$$(3)_a \qquad \begin{aligned} &\Delta_n V + c_1\Delta_{n-1}V + \cdots + c_{n-1}\Delta V + c_n V \\ &= -4\pi\,(C_0 k + C_1\Delta k + C_2\Delta_2 k + \cdots + C_{n-1}\Delta_{n-1} k), \end{aligned}$$

dove le n nuove costanti $C_0, C_1, C_2, \cdots C_{n-1}$ hanno i valori seguenti:

$$(3)_b \qquad \left\{ \begin{aligned} C_0 &= \psi_0^{(2n-2)} + c_1\psi_0^{(2n-4)} + \cdots + c_{n-2}\psi_0'' + c_{n-1}\psi_0, \\ C_1 &= \psi_0^{(2n-4)} + c_1\psi_0^{(2n-6)} + \cdots + c_{n-2}\psi_0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_{n-2} &= \psi_0'' + c_1\psi_0, \\ C_{n-1} &= \psi_0. \end{aligned} \right.$$

« Se ora si pone:

$$\psi(r) = A_1 e^{-\alpha_1 r} + A_2 e^{-\alpha_2 r} + \cdots + A_n e^{-\alpha_n r} = \sum A e^{-\alpha r}$$

e se si ammette che le n costanti (diseguali) α siano radici dell'equazione

$$\alpha^{2n} + c_1\alpha^{2n-2} + \cdots + c_n = 0,$$

questa funzione ψ soddisfa appunto all'equazione differenziale (3), qualunque sieno le costanti A, e la formola $(3)_a$ diventa precisamente quella che il prof. Neumann assume come espressione definitiva del teorema analogo a quello di Poisson, rispetto alla legge esponenziale polinomia:

$$\frac{\Sigma A e^{-\alpha r}}{r}$$

(cfr. il § 8 del capitolo III dell'opera del Neumann).

« Per verità la funzione V considerata dal prof. Neumann comprende anche una parte dipendente da distribuzioni in superficie; ma un' ovvia riflessione mostra che l'equazione $(3)_a$, la quale non è per sè stessa applicabile che a punti (x, y, z) nei quali la densità cubica k sia finita e determinata, sussiste senz'altro, sotto questa medesima riserva, anche nel caso d'una distribuzione mista, di spazio e di superficie. Rispetto ai punti d'una distribuzione superficiale continua invece a sussistere l'ordinaria relazione fra le due derivate normali della funzione potenziale, semprechè la funzione $\psi(r)$ e la sua derivata $\psi'(r)$ si mantengano finite per $r = 0$; come risulta dall'identità:

$$\frac{\psi(r)}{r} = \frac{\psi(0)}{r} + \frac{\psi(r) - \psi(0)}{r}$$

e come in particolare si verifica per la legge esponenziale. Naturalmente nel secondo membro della relazione anzidetta la densità quadratica si trova affetta dal fattore costante $\psi(0)$ ».

Astronomia. — *Macchie, facole e protuberanze solari osservate nel 2° e 3° trimestre del 1895 al R. Osservatorio del Collegio Romano.* Nota del Socio P. Tacchini.

« Ho l'onore di presentare all'Accademia un riassunto delle osservazioni solari fatte al R. Osservatorio del Collegio Romano nel 2° e 3° trimestre del corrente anno. In questi trimestri essendo compresi i mesi più favorevoli a queste osservazioni, si è potuto osservare il sole in 150 giornate, cioè in 98 da me e 61 dal sig. Palazzo. I risultati ottenuti per le macchie e facole sono contenuti nella seguente tabella:

1895

Mesi	Numero dei giorni di osservazione	Frequenza delle macchie	Frequenza dei fori	Frequenza delle M+F	Frequenza dei giorni senza M+F	Frequenza dei giorni con soli fori	Frequenza dei gruppi	Media estensione delle macchie	Media estensione delle facole
Aprile . . .	22	9,68	12,82	22,50	0,00	0,00	5,73	86,50	120,91
Maggio . . .	20	6,85	10,95	17,80	0,00	0,00	4,70	57,40	55,00
Giugno . . .	27	9,11	12,11	21,22	0,00	0,00	4,70	60,00	57,41
2° Trimestre	69	8,64	12,00	20,64	0,00	0,00	5,03	67,68	76,96
Luglio . . .	30	5,63	6,43	12,06	0,00	0,00	3,90	28,40	78,50
Agosto . . .	30	9,57	12,93	22,50	0,00	0,00	4,40	90,23	75,67
Settembre.	30	5,07	6,63	11,39	0,00	0,00	4,13	49,97	70,00
3° Trimestre	90	6,75	8,67	15,42	0,00	0,00	4,14	56,11	74,72

« Il fenomeno delle macchie solari è andato successivamente diminuendo e infatti le medie del 3° trimestre risultano tutte inferiori a quelle del secondo; nessun giorno però senza macchie e senza fori o con soli fori. È notevole il massimo secondario nella frequenza ed estensione delle macchie nel mese di Agosto preceduto e seguito da periodi di grande scarsità e poca estensione del fenomeno. Per le facole invece non si notarono differenze forti, cosicchè le medie per trimestre risultano della stessa importanza. La più grande frequenza ed estensione delle macchie corrisponde all'intervallo dal 3 al 12 Agosto.

« Per le protuberanze il numero delle giornate di osservazione riescì un poco minore: esse furono osservate in 98 giorni da me, e in 55 dall' assistente sig. Palazzo: ecco i risultati per trimestre:

1895

Mesi	Numero dei giorni di osservazione	media frequenza delle protuberanze	media altezza per giorno	media estensione per giorno	media della massima altezza	massima altezza osservata
Aprile . . .	18	7,11	41″,1	1°,8	61″,8	123″
Maggio . . .	17	7,94	40,0	1,7	60,9	141
Giugno . . .	25	6,96	37,2	1,6	55,0	97
2° Trimestre	60	7,28	39,2	1,7	58,7	141
Luglio . . .	30	7,80	41,4	2,0	61,6	168
Agosto . . .	30	7,67	41,9	1,8	65,2	177
Settembre .	28	6,00	41,8	1,9	59,0	108
3° Trimestre	88	7,18	41,7	1,9	62,0	177

« Nel complesso si può dire, che il fenomeno delle protuberanze solari si mantenne pressochè stazionario e perciò non vi ha corrispondenza col massimo secondario delle macchie osservate in Agosto: per altro non mancarono belle protuberanze e molto alte, come vedesi dalla tabella ».

Astronomia. — *Osservazioni sulle Leonidi.* Nota del Socio P. Tacchini.

« Io e il prof. Millosevich abbiamo fatto osservazioni sulle Leonidi nel mattino dei giorni 13, 14 e 15 del corrente Novembre, dalle 2^h alle 6^h, intervallo il più indicato per questa corrente. Le osservazioni erano state raccomandate in modo speciale avvicinandosi l' epoca del ritorno della grande pioggia meteorica, che dovrebbe verificarsi nel 1899. Le osservazioni furono in parte contrariate dalle nuvole e nebbie, ma negli intervalli lucidi nel mattino del 13 si notò una deficienza certa di stelle filanti ed una sola fu osservata dalle $4^h,45$ alle $5^h,15$. Nel mattino del 14 le condizioni del cielo furono migliori, perchè dalle $3^h\,39^m$ alle 6^h fu sempre sereno, ma di Leo-

nidi non se ne videro che 7 soltanto e deboli. Nel mattino del 15 si ebbe cielo sereno dalle $3^h\,30^m$ alle $4^h\,50$, ed in questo intervallo furono notate solo 3 filanti. Si può dunque conchiudere, che il fenomeno anzi che presentarsi di un' importanza maggiore dei precedenti anni, fu debolissimo ».

Astronomia. — *Osservazioni sul pianeta Venere fatte al R. Osservatorio del Collegio Romano nell' estate del 1895.* Nota del Socio P. TACCHINI.

« Dopo le considerazioni fatte dal prof. Schiaparelli sulle vecchie osservazioni e sulle proprie, e dopo la conclusione a cui egli pervenne, che cioè la rotazione del pianeta intorno ad un asse proprio non doveva ritenersi di 24 ore, ma di 224,7 giorni, le osservazioni sulle macchie od ombre che si presentano sul pianeta diventarono più interessanti, essendovi ancora degli osservatori viventi, che pretendono invece di aver trovato colle proprie osservazioni una durata della rotazione di ore 24. Ora mi pregio di riferire all'Accademia, che le osservazioni fatte da me e dall'assistente sig. Peyra si accordano con quelle dello Schiaparelli, cioè a dire dimostrano, che il pianeta non ruota intorno ad un asse proprio in 24 ore, ma lentissimamente, così che in uno stesso giorno alcune particolarità del pianeta rimangono sempre le medesime.

« Le nostre osservazioni incominciano in Luglio e terminano col 9 Settembre, e in questo intervallo si sono fatti molti disegni del pianeta, cercando di eseguirne almeno due in una stessa giornata, procurando inoltre che l' intervallo fra la prima e l' ultima osservazione fosse il più lungo possibile, ciò che dipendeva dalla posizione del pianeta e dallo stato del cielo. Così, ad esempio, detto intervallo mi risultò di 8 ore nei giorni 8-9 dell'Agosto, di 7 nel 18 Luglio e 7 Agosto, e si andò poi restringendo così che in Settembre non si ha che 4 ore nel giorno 7. È chiaro dunque che nelle favorevoli condizioni in cui si osservava il pianeta, cioè intorno alla sua congiunzione inferiore, se il moto rotatorio fosse stato di 24 ore e se alla superficie del pianeta si presentavano particolarità rimarchevoli e ben definite, lo spostamento doveva rendersi certamente visibile per effetto della rotazione, come ad esempio avviene per Giove, Marte e Saturno.

« Queste osservazioni però sul pianeta Venere sono difficili, sia per la forte luce sia per la densa atmosfera del pianeta stesso; per modo che i disegni fatti da diverse persone nello stesso tempo possono anche risultare assai diversi: ma ciò ha poca importanza per la questione della durata del moto rotatorio del pianeta, perchè basta che l' osservatore riesca ad individuar bene anche una sola particolarità della superficie del pianeta, e che l' atmosfera terrestre si mantenga in buone condizioni, affinchè egli possa accertare per bene, che detta particolarità si mantiene oppur no allo stesso posto du-

rante il periodo delle osservazioni di una data giornata. Perciò sono egualmente utilizzabili le mie orservazioni e quelle dell' assistente sig. Peyra, sebbene i disegni di lui non si accordino in tutto coi miei: differenze che dipendono in gran parte dalla difficoltà di distinguere delle particolarità in un oggetto tanto luminoso, mentre a me forse la cosa riesciva più facile, essendo il mio occhio abituato alla luce intensa per le osservazioni solari, che da 25 anni vado eseguendo, mentre a me invece riesce difficile l' osservazione di un oggetto isolato debolissimo come una nebula o stella o pianeta piccolissimi. Ma, come accennai nella presente questione, queste differenze hanno poca importanza.

« Dalle osservazioni fatte io ricavai 63 disegni a intervalli di più ore, e l' assistente sig. Peyra 41. Nel fare un disegno del pianeta si teneva il sistema di non portare l'attenzione ai disegni precedenti, salvo rare eccezioni. Ora da tutta la serie delle osservazioni, tanto io che il Sig. Peyra abbiam dovuto conchiudere, che la rotazione del pianeta deve essere lentissima, e tanto che nella stessa giornata e anche in più giorni di seguito si vedeva nel complesso sempre la stessa cosa e non si trovava spostamento apprezzabile in quelle particolarità più marcate e che di preferenza si vedevano presso le cuspidi.

« Dunque è molto probabile, che la durata della rotazione sia di 224,7 giorni, cioè eguale alla rivoluzione siderea del pianeta, come pel primo ha dichiarato di ritenere lo Schiaparelli. Come esempio delle nostre osservazioni presento all'Accademia una fotografia dei miei tre disegni del 9 Agosto, uno dell' 11 e due del 12; i primi tre furono eseguiti nell' intervallo di 8 ore, ed è evidente la permanenza delle stesse particolarità, visibili ancora nei giorni 11 e 12 e successivi colle necessarie variazioni dovute al moto di traslazione del pianeta e della terra.

« Io seguitai ad osservare il pianeta, come dissi, fino al 9 di Settembre, epoca in cui la fase era ridotta ben piccola, e nel primo giorno di quel mese mi accorsi di un singolare fenomeno, cioè di un arco nebuloso sulla parte oscura del pianeta dalla parte della cuspide australe, come è indicato nella fotografia che presento; la prima osservazione la feci a 1^h dopo mezzodì e la seconda alle $4^h \frac{1}{2}$ rivedendo lo stesso arco; il fenomeno poi lo vidi anche nei giorni successivi, quando l' aria era tranquilla. La regione racchiusa fra l' arco e la cuspide, mi appariva come nera, mentre io non ho mai veduto intieramente la parte oscura del pianeta. Invece il sig. Peyra ha potuto vedere il disco intiero a istanti, e ne aveva la conferma occultando opportunamente la parte lucente dell' astro. All' epoca della congiunzione poi, il prof. Millosevich ha distinto nettamente il disco intiero, che gli appariva, come egli dice, un po' meno lucente del cielo circostante, per modo che giustamente egli ritiene, come altri, detta visibilità dovuta al projettarsi di Venere sulla luce zodiacale. Anche jeri ho osservato il pianeta dalle 6^h 30 alle 13^h 10, e in questo intervallo di quasi sette ore non mutò aspetto, e sebbene si tratti di una parte

diversa da quella che vedevamo in Luglio, pure i caratteri principali sono molto somiglianti, così che tutta la superficie del pianeta andrebbe considerata distinta in 3 parti, cioè due calotte grandi opposte e aventi per centro i vertici delle cuspidi attuali; queste calotte non sono terminate nettamente, ma da esse partono come delle correnti, o lingue dirette, in certo modo verso il centro del disco, mentre la parte centrale è cosparsa di nubi di varie forme; il contrario di ciò che succede nei pianeti ad atmosfera densa e dotati di un forte moto di rotazione, nei quali le nubi oscure e zone luminose sono tutte fra loro parallele e normali all' asse di rotazione. Anche questa circostanza mi sembra doversi considerare come un' altra prova della lentissima rotazione del pianeta Venere, la cui atmosfera è potentemente riscaldata sempre da una sola parte, cioè da quella che costantemente è rivolta al sole ".

Fisica terrestre. — *Sulla diversa intensità di movimento nell' area scossa dal terremoto romano del 1° novembre 1895.* Nota del Socio P. Tacchini.

Chimica. — *Il parabromotoluene nelle ricerche crioscopiche.* Nota del Socio E. Paternò.

Queste Note saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Geologia. — *Osservazioni stratigrafiche sui terreni paleozoici nel versante italiano delle Alpi Carniche.* Nota del Socio T. Taramelli.

" La notizia dell'esistenza di fossili paleozoici nelle Alpi Carniche rimonta al 1855 e devesi al compianto dott. Stur; ma in fatto ne erano stati assai prima raccolti ai passi di Lanza e del Nassfeld, a nord di Pontebba, dal sig. dott. G. A. Pirona, del quale sono noti i pregevoli studi paleontologici sul Friuli e che a quel tempo si occupava di botanica. Furono poche specie, che però bene determinate bastarono a dimostrare l'esistenza del carbonifero; siccome non erano stati raccolti fossili sicuramente riferibili ad altra epoca, nella Carta geologica d'insieme pubblicata dal signor Hauer nel 1866 tutta la catena delle Carniche, in quanto non è di terreni mesozoici od azoici, è riferita al carbonifero, distinto in calcare ed in scisti della valle di Gail. Nel 1867 e nei seguenti anni, mentre io mi trovava insegnante nel R. Istituto Tecnico di Udine, aveva raccolto un ricco materiale di fossili paleozoici, quasi tutti carboniferi, aveva deteminato buon numero

di specie e preparato un atlante di 13 tavole; se non che la pubblicazione della Monografia del Koninck sui fossili carboniferi di Bleiberg, località cariziana poco discosta, la incertezza di alcune mie determinazioni nella scarsità del materiale per confronto di che allora io poteva disporre e la grave spesa che sarebbe occorsa per la stampa, mi fecero protrarre la pubblicazione; limitandomi ad una descrizione stratigrafica, con una tavola di profili, pubblicata nelle Memorie del R. Istituto Veneto di S. L. ed Arti nel 1873. Però nelle seguenti pubblicazioni delle carte geologiche delle provincie di Udine e di Belluno, accompagnate da due volumetti esplicativi, ho delimitato e distinto quei terreni, per quanto la ristrettezza della scala lo comportava e secondo il risultato di miei rilievi, preliminari ed incompleti ma basati su gite effettivamente compiute in una regione per condizioni orografiche malagevole. Nel 1881 ebbi la fortuna di trovare io pure a nord di Paularo dei graptoliti siluriani; ma già nove anni prima altri di tali fossili erano stati raccolti presso Tarvis e determinati dal signor Stache, Direttore attuale dell'I. R. Istituto geologico Austriaco; al quale geologo dobbiamo uno studio importantissimo sul paleozoico alpino, pubblicato nel 1874. Nel mio libro sulla geologia delle Provincie Venete, che ebbe l'onore di un premio Reale aggiudicato dalla nostra Accademia, ho brevemente riassunto le nozioni che allora si avevano sul versante italiano della catena in discorso; ma nella carta d'insieme unita a quello scritto ho compendiato meno felicemente le indicazioni contenute nelle due carte sopracitate, nella speranza che un rilievo definitivo, con personale e con mezzi sufficienti, permettesse quella esattezza, che io non aveva saputo nè potuto raggiungere. Non ommetteva però di raccomandare ai miei amici ed allievi quella interessante regione, nella quale è facile intendere come stia la chiave dello studio dei terreni paleozoici di tutta la Catena alpina. Nè la raccomandazione fu del tutto vana; perchè il dott. Tommasi scopriva presso Paularo, alla sella di Pizzul, una nuova località di fossili carboniferi, dove fece una gita anche coi colleghi Parona e Bozzi; e questi descrissero l'uno i molluschi raccolti quivi e presso Pontebba e l'altro i vegetali. Il dott. Gioacchino De-Angelis, al quale aveva mandato alcuni corallari raccolti in un calcare all'alpe Lodinut, a nord di Paularo, appena potè farlo, si è occupato del loro studio e di altri polipai dei dintorni di Pontebba, determinando i primi come devoniani ed i secondi come carboniferi.

« Siccome i lavori per la Carta geologica del Regno si svolgono lodevolmente in regioni lontane dalle Carniche e non procedono solleciti per ragioni, che è assai più facile lamentare che togliere; siccome non è molto abbondante in Italia il numero dei geologi, che possano disporre di mezzi e di tempo sufficienti per un rilievo dettagliato di una regione alpestre e molto ampia; così bisogna pur convenire che sarebbero passati forse ancora alcuni anni in questo stato di incompleta conoscenza della stratigrafia nella

regione paleozoica di quella catena, se anche al versante italiano non si fosse esteso il campo di studio di un egregio geologo tedesco, il signor dott. Fritz Frech, il quale con un' opera suntuosamente illustrata descrisse quei terreni nella loro natura e nelle reliquie organiche, tentando altresì di intenderne la complicata tectonica. Il pregevole volume con molti profili, moltissime fotografie di paesaggi e tre carte geologiche, fu pubblicato lo scorso anno in Halle e segna certamente un grande progresso nelle nostre cognizioni su quella catena. Infatti, vi si dimostra come la serie paleozoica sia assai più completa di quanto dapprima si conoscesse, per l'esistenza dei terreni devoniani, a varia *facies*, tra il siluriano ed il carbonifero; e per ciascun periodo si citano lunghe ed interessanti serie di fossili e si espongono dei rapporti tectonici assai interessanti. Ma un esame minuzioso di questa ricca illustrazione non entra nello scopo di questo scritto, bastando, a mio avviso, pochi appunti per dimostrare come pel versante italiano della catena quell'opera sia incompleta ed inesatta; tantochè il rilievo definitivo e dettagliato della regione debbasi considerare ancora da farsi e per alcuni riguardi sia da considerarsi meno lontana dal vero la mia carta geologica del Friuli, eseguita venti anni sono, in confronto della carta in scala quasi tripla della mia, del chiarissimo geologo tedesco.

« Siccome l'affidarmi soltanto alla reminiscenza di escursioni compiute in mia gioventù, di fronte ai fatti nuovamente scoperti ed alle asserzioni esplicite del signor Frech, mi lasciava molto incerto nell'esporre i miei apprezzamenti, presentandosi l'occasione per studiare di nuovo un argomento assai importante, pensai di rivolgere alla spettabile Presidenza la domanda di un sussidio per le escursioni da farsi. D'averlo ottenuto assai mi compiaccio e ne rendo grazie; perchè queste escursioni furono occasione che la regione fosse visitata anche dai miei giovani amici professori Tommasi, Brugnatelli, De Angelis ed Olinto Marinelli, i quali mi aiutarono nel raccogliere fossili e rocce e percorsero alcuni tratti più alpestri, che io non potei visitare o rivedere nel breve tempo, che abbiamo potuto dedicare a queste gite. Il materiale raccolto è in istudio e mi recherò a dovere di presentare a suo tempo i risultati della determinazione di esso. Gli appunti che presento emergono dalla osservazione diretta delle località e sono, a mio avviso, così evidenti da non occorrere alcun ulteriore argomento a loro appoggio; li espongo seguendo la serie dei terreni.

« *Terreno siluriano.* Interessa il versante italiano soltanto la porzione superiore di questo terreno, costituita dagli scisti a graptoliti e dai calcari ad ortoceratiti; ma le indicazioni del signor Frech sono del tutto inesatte, per quanto riguarda la provincia di Udine. Infatti nell'ultima gita il prof. Tommasi osservò e raccolse in posto un campione di scisto a graptoliti presso al Cristo di Timau là dove il signor Frech segna carbonifero inferiore; mentre la carta di questi indica siluriano presso la Stua di Ramaz, dove io rinvenni

impronte di *Calamites* e di *Lepidodendron*, e comprende nel siluriano quell'importante massa di calcare a corallari devoniani, che sorge sopra all'alpe di Lodinut. Inoltre egli segna un incuneamento di siluriano affatto insussistente a sud della Stua di Ramaz, all'origine dell'Incarojo, ponendolo a contatto discordante con un supposto trias del M. Germula, che è del pari devoniano. E d'altra parte il signor Frech trascura nel Canale del Degano tutte le masse di calcari ad ortoceratiti di Rigolato, Valpicetto, Calgaretto, S. Giorgio e Comeglians, che almeno litologicamente io aveva distinto nella mia carta e nelle quali trovammo fossili nelle ultime gite. Non sono ancora certo che si debbano riferire davvero al siluriano i calcari ad ortoceratiti, nè della valle del Degano nè della Stua di Ramaz; perchè mi paiono questi calcari in stretto rapporto colle formazioni più recenti. Ma ad ogni modo il complesso di salti ideato dall'autore all'origine dell'Incarojo è del tutto fantastico; al più potendosi ammettere un salto nel senso che quivi è indicato dal signor dott. Geyer, del quale il profilo meglio corrisponde ai fatti da me riscontrati. Trattasi piuttosto di arricciamenti della zona dei calcari sottilmente stratificati, che abbraccia le grosse masse di calcari corallini devoniani; e questo incuneamento così strano, supposto dal signor Frech alla Stua di Ramaz, non è più fondato di quanto lo sia quell'altro ancor più strano salto di Plöcken, al passo di M. Croce. Al momento non saprei precisare come realmente si avveri la giustaposizione del siluriano al carbonifero presso Timau e nemmeno come si svolga il contorcimento a curva paraboloide, che comprende la grande massa dei monti di Timau e di Pail, formata di un intreccio di scisti e di calcari dal siluriano al carbonifero; è però certo che la tectonica è diversa affatto da quanto è segnato nella carta del signor Frech.

« *Terreno Devoniano*. Non abbiamo ancora rinvenuta in territorio italiano una località altrettanto ricca come quella del passo di Volaja, dove il signor Frech raccolse le molte specie del suo devoniano inferiore; ma la *facies* corallina, con bellissimi petrefatti, fu da noi trovata assai fossilifera in più siti e particolarmente presso all'alpe Valle di Collina, dove il signor Frech non pare abbia rinvenuto alcun fossile; più ricca ancora ne è la massa calcare di Lodinut, ritenuta siluriana e come tale indicata nella carta di questo autore. Si raccolse altresì buon materiale nei dintorni di Collina e di M. Croce, e intendo rinnovare quivi le ricerche. Fummo non meno fortunati nel rinvenimento di fossili nella zona a *Clymenia*, in particolare a levante di Timau, dove questa zona ci si è presentata più estesa di quanto compare nella carta del signor Frech. E qui rammento di avere osservato sezioni di cefalopodi con tutta probabilità spettanti al detto genere lungo il crinale del partiacque sopra il Pecol di Chiaula; località, che nello scorso autunno non ho potuto rivedere. È quindi fuori di dubbio che l'estensione del terreno devoniano nel versante friulano delle Carniche è molto più vasta di quella

che è parsa al signor Frech. Calcari a *Beaumontia* furono da noi osservati e raccolti a nord della sella del M. Pizzul, e ritengo assai probabile che tutta la massa del Germula, indicata come triasica dal signor Frech, sia invece devoniana, come è sicuramente devoniano il calcare sul versante meridionale di quella montagna, percorso dal signor D^r. De Angelis. Inoltre il signor Frech ha ommesso di dimostrare stratigraficamente che le varie forme litologiche del devoniano carnico siano in realtà di varia epoca, anzichè equivalenti; come non ha considerato gli accartocciamenti delle propaggini ed apofisi, che le masse calcari gettano nelle masse scistose circostanti, avvertendo il fatto soltanto nella massa del M. Croda Bianca, a nord-ovest di Collina, dove esso è evidente.

« Rimane poi ancora da studiare quale sia il limite tra siluriano e carbonifero, dove manca il devoniano, e se vi sieno delle forme scistose equivalenti ai calcari devoniani. Non devesi far troppo a fidanza colle supposte faglie; poichè noi vediamo che le regioni meglio studiate presentano i più strani esempi di contorcimenti e di rovesciamenti, ma ben di rado offrono di quei scorrimenti e di quelle fratture a spezzate, di cui il signor Frech fa largamente uso nel suo rilievo. Ma l'autore intese certamente per l'area italiana, rapidamente percorsa e soltanto in parte, di dare una rappresentazione approssimativa, col torto però di aver trascurato quanto era stato fatto quivi da me e da altri italiani. Non sarò però ingiusto nel disconoscere il merito, che egli ebbe pei fatti nuovi scoperti e pei fossili copiosi da lui raccolti e determinati; non che per averci richiamati allo studio di quella regione, collo stimolo di una gara, che io spero potranno assai meglio di me sostenere i miei giovani amici. Stabilita l'esistenza nelle Alpi Carniche italiane del terreno devoniano, nelle sue varie *facies*, in più larga estensione di quanto risultava al signor Frech, ora rimane il còmpito di determinarne la tectonica e le faune; al quale intento spero di poter dedicare altre escursioni.

« *Terreno Carbonifero.* La regione circostante a Pontebba, in area carinziana, è illustrata assai lodevolmente dal signor Frech, che tenne calcolo anche degli studi dei geologi austriaci: a quanto mi sembra, vi saranno alcune gravi mende da correggere nel gruppo del Trohkofel, ma per le classiche località di Krone e del Auernig, il lettore può trovare nella descrizione stratigrafica, nella serie dei fossili e nelle fotografie dell'autore, un amplissimo complemento a quello che io scrissi molti anni or sono in argomento. Della regione del M. Auernig io aveva inedite alcune fotografie e molti appunti, rilevati in occasione di una gita quivi fatta nel 1889 coi miei allievi; ma le une e gli altri ebbero la sorte dell'atlante suaccennato, in causa della mia irresolutezza. La regione a levante di Paularo, su cui abbiamo alcune notizie assai esatte del dott. Tommasi e nelle quali anche recentemente si è rilevato un buon profilo del terreno carbonifero a sud della detta sella di

M. Pizzul, venne invece dal signor Frech o tralasciata o visitata soltanto alla sfuggita. Io mantengo, fino a prova contraria, anche in base alle ultime gite, il riferimento del calcare del M. Salinceit al piano a *Bellerophon* anzichè al trias superiore, ed aggiungo la notizia, che parmi importante, che nella massa di strati alterni di scisti e di calcari, che sta tra gli strati a *Productus* della sella del Pizzul e la massa di conglomerati quarzosi, che mano mano prevalgono più a sud, sino alle falde settentrionali del M. Salinceit, si mantiene la *facies* corallina delle poco discoste masse devoniane. Non sono ancora del tutto sicuro dei rapporti tectonici della serie carbonifera colle arenarie e puddinghe di Gröden e perciò mi riservo a tornare in sito. Però, in base alle escursioni fatte nello scorso autunno ed alle altre compiute quando ero insegnante a Udine, e ad onta dell'opinione del tutto diversa del signor Frech, mantengo l'idea che le diabasi ed i tufi sottostanti a queste puddinghe ed arenarie rosse riferite di solito al permiano, non facciano parte del terreno carbonifero ma spettino esse pure al permiano, come più volte ho sostenuto ne' miei scritti. Il terreno carbonifero delle Alpi Carniche, del quale lo sviluppo nell'area italiana è incomparabilmente meno ampio di quanto risulterebbe dalla carta del signor Frech, in particolare nel tratto tra il But ed il Degano, che egli o non visitò o percorse soltanto alla sfuggita, non comprende nè tufi, nè diabasi, nè porfidi, nè altra roccia eruttiva. E se si vuole quivi distinguere un carbonifero inferiore, in base alle frequenti ma poco determinabili tracce di vegetali, che si raccolgono negli scisti meno lontani od in contatto colle masse calcari del devoniano nei dintorni di Collina, Ca Monument, Primosio, Culet e M. Pizzul, appunto lungo questa zona non troviamo quelle rocce diabasiche, porfiriche e tufacee, che furono dal signor Frech riferite, credo a torto, al carbonifero inferiore.

« Non so quanto sieno dimostrate le discordanze, che l'autore suppone tra il suo carbonifero inferiore ed il carbonifero superiore delle Alpi Carniche e tra questo ed il permiano; ma di quest' ultima mi sembra maggiore la probabilità per quanto ho veduto lungo la valle del Chiarsò dalla Stua di Ramaz a Paularo sulle due sponde, sulla via pel passo di Pizzul, lungo le valli del Durone e della Val-Calda e nei dintorni di Comeglians e di Rigolato. Ma quand'anche fossero entrambe queste discordanze dimostrate, la distribuzione delle due parti del carbonifero, da lui ammesse nell'area italiana della catena, sarebbe inconcepibile ed in ogni caso egli avrebbe sempre commesso un errore tralasciando di segnare quell'ampio sviluppo, che assumono anche nei monti tra il Degano ed il But quelle rocce porfiriche, diabasiche e tufacee, che io aveva già quivi indicato, riferendole al permiano e che egli, credo erroneamente, riferisce al carbonifero inferiore. Queste rocce diabasiche, porfiriche e tufacee sono in fatto ampiamente sviluppate in una zona continua nei dintorni di Calgaretto e Valpicetto; salgono al M. Crostis, passando per

Gracco ed a nord di Vuezzis, in duplice zona; per vetta Grassolina si continuano ai monti Terzo e Zuplan, di fronte al M. Dimon, dove io le indicai assai prima che il signor Frech. I porfidi quarziferi, da me e non da altri rinvenuti in posto al M. Zuplan, sulla traccia degli erratici che aveva trovato sparsi nella regione centrale e destra dell'anfiteatro morenico del Tagliamento, non sono molto diversi dai noti porfidi felsirici del Luganese e del Tirolo Meridionale; ed i tufi diabasici, colle diabasi, equivalgono, a mio modo di vedere, alle rocce augitiche ed anfiboliche, che nel Bellunese e nella Val Sugana sottostanno ai porfidi quarziferi. Meglio ancora che nei porfidi luganesi e tirolesi, ne troverei la rispondenza nella serie eruttiva permiana della Val Trompia e della valle del Caffaro. Per conseguenza, in particolare per le analogie colla serie nella catena orobica, io inclino a ritenere che quegli argilloscisti varicolori e prevalentemente verde-scuri o neri, che occupano gran parte dell'area circostante alle dette rocce diabasiche e porfiriche, per me permiane, piuttosto che al carbonifero debbansi riferire al *Rothliegendes*, tolte le località dove si rinvennero fossili carboniferi. Il ritorno parziale alle idee del Suess, di quasi trent'anni fa, potrà parere a taluni un regresso; ma per convincermi di ciò attendo che il signor Frech mi dimostri, meglio di quanto abbia fatto, la spettanza al carbonifero inferiore delle rocce endogene nella serie paleozoica delle Alpi Carniche.

« *Terreno Permiano.* Evidentemente dalla soluzione dell'accennata discrepanza tra le mie e le idee dell'illustre geologo tedesco, dipende la delimitazione del terreno permiano verso al paleozoico più antico. Ma altra questione che non mi pare ancora del tutto dilucidata dal lato stratigrafico, consiste nella spettanza o meno al Permiano della importante formazione dei calcari a *Bellerophon*. Dico dal lato stratigrafico; perchè, quanto alla fauna, i caratteri di questa serbano una distinta fisonomia paleozoica, la quale però non è del tutto scomparsa nella fauna di S. Cassiano e si mantiene, quanto ai cefalopodi almeno, nella fauna del Trias inferiore. Ma per la innegabile concordanza del calcare a *Bellerophon* cogli strati di Werfen, anzi pel graduato passaggio, che in tutta la Carnia ho avvertito dall'una all'altra formazione, io rimarrei molto dubbioso nel ritenere questo terreno, probabilmente di estuario, abbondantemente gessifero, come permiano anzichè triasico. Noto che un tenue rappresentante litologico del calcare cariato, sottostante alle arenarie variegate e superiore al conglomerato rosso del piano di Göden, fu da me avvertito la scorsa primavera nei dintorni di Bellano, in Lombardia, nel dominio delle rocce ritenute triasiche e al disotto dell'altra zona di gessi e di dolomia cariata, che nella Lombardia normalmente si estende tra le arenarie variegate ed il calcare conchigliare. Comunque sarà per risolversi questa questione, mi compiaccio di poter dare la notizia che per la prima volta in Carnia, nella esecurione da noi fatta, si sono trovati dei fossili determinabili del piano a *Bellerophon*. Scorti la prima volta sotto Sostasio

dal dott. Brugnatelli e riconosciuti proprî di tal piano dal dott. Tommasi, furono da noi tutti raccolti in questa ed in tre altre località presso Comeglians e presso Paularo; epperò speriamo che ricerche ulteriori potranno procurarci ancora più abbondante materiale.

« Poichè nella fatta escursione mi proposi di constatare sino a qual punto fossero attendibili le modificazioni apportate da ulteriori scritti alla mia carta geologica del Friuli, pubblicata in piccola scala e rilevata con tenui mezzi un quarto di secolo fa, quindi sicuramente bisognevole di miglioramenti, così non ho mancato di osservare se nei dintorni di Entrampo, al M. Talm, sia realmente, come si rappresenta dal Frech, in appoggio alle osservazioni del giapponese Harada, quella dislocazione che permette il parziale affioramento delle arenarie di Gröden e che sposta a nord sul lato di ponente bruscamente la serie triasica e permiana nel versante settentrionale della catena del Tuglia; ma ho potuto concludere che si tratta di un accidente stratigrafico assai più complicato, che cagiona sul versante sud, sino al fondo della valle la presenza dei tufi diabasici, secondo me permiani e pel signor Frech del carbonifero inferiore. Questi poi erano stati già da me osservati ed indicati quivi e furono di nuovo rintracciati nella nostra escursione. Abbiamo anche notato che sopra Calgaretto il calcare a *Bellerophon* sensibilmente si attenua e quasi scompare; e che sotto di esso si sviluppano regolarmente le rocce diabasiche, che poi si stendono fino a Magnanins di Rigolato. Queste rocce furono minutamente descritte nel 1890 dal dott. Ettore Artini in una Memoria, che il signor Frech non conosce. Eppure lo studio di questo tratto della Carnia, io penso, avrebbe forse dissuaso questo geologo dall'opinione che le rocce endogene del paleozoico carnico fossero di epoca diversa da quella, che è indicata dalla loro costante concomitanza colle arenarie di Gröden; pure ammesso un certo grado di discordanza, motivato a mio avviso dalla grande probabilità che queste arenarie ed il sovrapposto calcare a *Bellerophon*, anzichè permiani, sieno ancora a riferirsi al *Röth* cioè al Trias inferiore.

« Cogli esposti cenni intesi a comprovare all'Accademia, che si è cominciato a ristudiare l'argomento, sul quale ha richiamato l'attenzione l'egregio signor Frech; nel mentre rinnovo l'espressione dei miei sentiti ringraziamenti pel sussidio, che mi venne concesso, e manifesto l'impegno di continuare le ricerche, affinchè la questione stratigrafica si trovi sufficientemente dilucidata quando si tratterà di rilevare la Carta Geologica di quella importante regione alpina. Siccome non andrà molto tempo ad esser compiuto il rilievo delle formazioni azoiche nelle Alpi Occidentali, il problema delle formazioni paleozoiche non si può discutere in alcun luogo in Italia, astrazione fatta dalla Sardegna, meglio che nelle Alpi Carniche. Trattandosi di stratigrafia, per quanto sia grande il valore degli studî paleontologici, importa sopratutto moltiplicare e ripetere le osservazioni in sito, in parecchi, sieno pure questi

di idee disparate. Quanto all'aiuto dei geologi stranieri, osservo sommessamente che un italiano, il quale uscisse dal confine per rilevare una carta geologica d'altro paese e la pubblicasse, commetterebbe un atto poco lodevole, trascurando inavvertitamente, come credo abbia fatto il signor Frech, carta e lavori di quei del sito, sieno pure di scarso valore; nè credo che fossero proprio tutti sbagliati gli scritti di altri italiani e miei sul paleozoico delle Alpi Carniche.

Astronomia. — *Sull'orbita del pianeta* (306) *in base a quattro opposizioni.* Nota del Corrispondente E. Millosevich.

« Allorchè il pianeta (306) *Unitas* venne in quarta opposizione nell'aprile decorso, l'Effemeride costruita sugli ultimi miei elementi, tenuto conto delle perturbazioni per Giove e Saturno, rappresentava la posizione in cielo con un errore di circa $+13^s$ in ascensione retta e $-1'$ in declinazione.

« Parve a me fosse venuto il momento opportuno d'una revisione generale di tutti i calcoli fatti dal marzo 1891 fino all'aprile 1895, poichè il pianeta è di già da tempo entrato nel suo secondo anno siderale, e un assetto quasi definitivo degli elementi era lecito sperare. Conveniva tuttavia rivedere i calcoli riguardanti le perturbazioni per 4 anni sotto l'azione di Giove e di Saturno, affinchè gli scarti fra i calcoli e le osservazioni fossero funzione soltanto degli errori degli elementi. Era ancora necessario passare in esame le osservazioni fatte durante le quattro opposizioni, affinchè i luoghi normali, uno per opposizione, riuscissero i migliori possibili.

« Questo lavoro io feci nell'autunno corrente, ed i risultati sono contenuti in questa breve Nota.

« Presi come punto di partenza gli elementi corretti in base a tre opposizioni; essi sono i seguenti:

Prima opposizione.

Equatore 1892.0.

$$
\begin{aligned}
T_0 &= 1891 \text{ marzo } 2{,}5 \text{ Berlino} \\
M &= 223^\circ\ 20'\ 38''.4 \\
\mu &= 979''.623247 \\
\omega_1 &= 293^\circ\ 31'\ 54''.2 \\
\iota_1 &= 18\ \ 17\ \ 43.\ 1 \\
\Omega_1 &= 14\ \ 27\ \ 58.\ 3 \\
\varphi &= 8\ \ 38\ \ \ 8.\ 9
\end{aligned}
$$

« Le numerose osservazioni, fatte in prima opposizione, vennero aggruppate in tre luoghi normali, che poi vennero ridotti ad un solo, che è il seguente:

« 1891 marzo 21,5 Berlino:

$$\alpha\ (1892{,}0) = 10^h\ 30^m\ 17^s.64$$
$$\delta\ (1892{,}0) = +14^\circ\ 1'\ 32''.1$$

e si ebbe, fra calcolo e osservazione:

(A)
$$\Delta\alpha \cos\delta = +0^s.34$$
$$\Delta\delta = +0''.9$$

« Giunto a questo punto ho riveduto i calcoli delle perturbazioni per l'azione di Giove ($\Delta t = 40$) e per quella di Saturno ($\Delta t = 80$) per l'intero periodo; nessun calcolo fu fatto per l'azione assai piccola, ma non trascurabile di Marte.

« Gli integrali delle perturbazioni per osculare a 1892 luglio 24,0 Berlino sono quasi identici a quelli avuti coi calcoli anteriori, cioè:

$$\int \Delta i = -\ 0''.29$$
$$\int \Delta \Omega = -\ 8.94$$
$$\int \Delta \varphi = -\ 12.85$$
$$\int \Delta \pi = +\ 542.72$$
$$\int \Delta L = +\ 120.49$$
$$\int \Delta \mu = +\ 0.47662$$

E però, riducendo al piano dell'eclittica il sistema precedente, cioè ponendo (1892.0)

$$\Omega = 141^\circ\ 37'\ 34''.2$$
$$i = 7\ \ 15\ \ 25.4$$
$$\omega = 165\ \ 26\ \ 41.4$$
$$\pi = 307\ \ 4\ \ 15.6$$

cioè
$$L = 170\ \ 24\ \ 54.0$$

si hanno gli elementi all'eclittica osculanti a T = 1892 luglio 24,0 B come segue:

Seconda opposizione.

Eclittica 1892.0.

$$T = 1892 \text{ luglio } 24.0 \text{ B}$$
$$M = 1^\circ\ 52'\ 14''.2$$
$$\mu = 980''.099867$$
$$\omega = 165^\circ\ 35'\ 53''.0$$
$$i = 7\ \ 15\ \ 25.1$$
$$\Omega = 141\ \ 37\ \ 25.3$$
$$\varphi = 8\ \ 37\ \ 56.0$$
$$L = 309\ \ 5\ \ 32.5$$
$$\pi = 307\ \ 13\ \ 18.3$$

Colle numerose osservazioni del 1892, da quattro luoghi normali, ho potuto dedurne uno solo, che è il seguente:

« 1892 luglio 30,5 Berlino

$$\alpha\ (1892.0)\ 21^h.12^m\ 48^s.80\,;\ \delta\ (1892.0) - 13^\circ\ 37'\ 44''.6$$

e si ebbe, fra calcolo ed osservazione

$$\text{(B)}\qquad \begin{array}{ll} \Delta\alpha \cos\delta & +\ 0^s.82 \\ \Delta\delta & +\ 1''.8 \end{array}$$

« Gli integrali delle perturbazioni per osculare a 1893 Dic. 26,0 sono leggerissimamente diversi dai precedenti dopo la revisione dei calcoli; solo $\int \Delta\varphi$ conteneva un errore di circa 20″. Essi sono:

$$\begin{array}{ll} \int \Delta i & -\ 1''.64 \\ \int \Delta\Omega & -\ 267''.92 \\ \int \Delta\varphi & +\ 245.51 \\ \int \Delta\pi & -\ 305.02 \\ \int \Delta L & -\ 471.02 \\ \int \Delta\mu & -\ 0.00195 \end{array}$$

Terza opposizione.

Eclittica 1892.0.

$$\begin{array}{lrrl} T = & \multicolumn{3}{l}{1893\ \text{dicembre}\ 26{,}0\quad B} \\ L = & 90^\circ & 31' & 53''.4 \\ \varphi = & 8 & 42 & 1.5 \\ \Omega = & 141 & 32 & 57.4 \\ i = & 7 & 15 & 23.5 \\ \mu = & & & 980''.09792 \\ \pi = & 307 & 8 & 13.3 \\ M = & 143 & 23 & 40.1 \\ \omega = & 165 & 35 & 15.9 \end{array}$$

« Il luogo normale per la terza opposizione è:

« 1893 Dic. 13,5 Berlino

$$\alpha\ (1892.0)\ 7^h\ 3^m\ 38^s.40\,;\ \delta\ (1892.0) + 14^\circ\ 44'\ 23''.4$$

$$\text{(C)}\qquad \begin{array}{ll} \Delta\alpha \cos\delta & -\ 1^s.16 \\ \Delta\delta & +\ 1''.1 \end{array}$$

« Finalmente gli elementi osculanti in quarta opposizione, i calcoli delle perturbazioni essendo stati trovati esatti con quelli pubblicati in passato, furono:

Eclittica 1900.0

$$
\begin{aligned}
T &= 1895 \text{ aprile } 20.0 \quad B \\
i &= 7^\circ\, 15'\, 24''.8 \\
\Omega &= 141\;\; 38\;\; 57.9 \\
\pi &= 307\;\; 8\;\; 4.6 \\
M &= 274\;\; 15\;\; 23.1 \\
L &= 221\;\; 23\;\; 27.7 \\
\omega &= 165\;\; 29\;\; 6.7 \\
\varphi &= 8\;\; 43\;\; 14.9 \\
\mu &= 980''.38814
\end{aligned}
$$

« Le osservazioni, a me note, fatte nella primavera scorsa, vennero utilizzate in parte per un luogo normale che è il seguente:

« 1895 Aprile 10,5 Berlino

$$\alpha\ (1900.0)\ 13^h\, 36^m\, 24^s.44 + 1^\circ\, 29'\, 31''.0$$

ed ebbesi

(D)
$$\Delta\alpha \cos\delta - 5^s.59$$
$$\Delta\delta \quad + 28''.5$$

« La revisione adunque portò un notabile vantaggio di per sè, e mostrò che gli elementi di partenza valevano di più di quello che paresse.

« Il luogo normale Aprile 10,5 riposa sopra cinque osservazioni (due mie e tre di Düsseldorf).

« Due osservazioni di Padova e alcune di Algeri mi fornirono un secondo luogo normale.

« 1895 Aprile 26,5

$$\alpha\ (1900.0)\ 13^h\, 22^m\, 3^s.78;\ + 3^\circ\, 16'\, 1''.3.$$

« Questo luogo normale fu riservato come luogo normale di prova felicemente riuscita.

« I valori, adunque, (A); (B); (C) e (D), cioè:

1891 marzo 21,5	$+ 0^s.34$	$+ 0''.9$	Osservazione meno calcolo
1892 luglio 30,5	$+ 0^s.82$	$+ 1''.8$	id.
1893 Dic. 13,5	$- 1^s.16$	$+ 1.1$	id.
1895 Aprile 10,5	$- 5^s.59$	$+ 28.5$	id.

sono funzione degli errori degli elementi che, per quello che dal tempo dipende, ha $T_0 = 1891$ marzo 2,5.

$$\left.\begin{aligned} \sum (15\,\Delta\alpha \cos\delta)^2 &= 7371''.5 \\ \sum (\Delta\delta)^2 &= 851.6 \end{aligned}\right\}\ 8223''.1$$

« Le otto equazioni lineari, che sono risultate capaci di correggere gli elementi di partenza, sono:

(Ascensione retta)

Δi_1	$\Delta\Omega_1 \operatorname{sen} i_1$	$\Delta\psi$	$\Delta\Phi$	$\Delta\mu$	ΔL^1_o	
(9. 27939) Δi_1 +	(9. 00169) $\Delta\Omega_1$ sen i_1 +	(9. 83586) $\Delta\psi$ +	(0. 39805) $\Delta\Phi$ +	(1_n 02895) $\Delta\mu$ +	(0.06680) ΔL^1_o	= (0. 70757)
(9. 48928)	(9_n 17612)	(0_n 54031)	(0_n 53238)	(3. 15017)	(0. 43187)	= (1. 09342)
(8. 07671)	(9_n 39213)	(0. 41572)	(9. 58302)	(3. 08886)	(0. 07065)	= (1_n 24055)
(8_n 86954)	(9. 41751)	(0_n 20111)	(0. 43941)	(3. 36860)	(0. 19098)	= (1_n 91908)

(Declinazione)

Δi_1	$\Delta\Omega_1 \operatorname{sen} i_1$	$\Delta\psi$	$\Delta\Phi$	$\Delta\mu$	ΔL^1_o	
(9. 86484) Δi_1 +	(0. 13454) $\Delta\Omega_1$ sen i_1 +	(9_n 37936) $\Delta\psi$ +	(9_n 78667) $\Delta\Phi$ +	(1. 13250) $\Delta\mu$ +	(9_n.45714) ΔL^1_o	= (9. 95424)
(0_n 24027)	(0_n 00275)	(9_n 74714)	(9_n 81244)	(2. 40763)	+ (9. 67449)	(0. 25527)
(0. 18310)	(9_n 25655)	(9. 20699)	(8_n 92912)	(0_n 74189)	+ (7. 89468)	(0. 04139)
(9_n 35548)	(0. 22656)	(9. 59479)	(9_n 97939)	(2_n 85465)	— (9_n 68861)	(1. 46389)

« Le otto equazioni vennero ridotte a sei col solito metodo dei minimi quadrati, e questa parte di lavoro spetta all'assistente dell'Osservatorio dott. Domenico Peyra.

« La risoluzione delle sei equazioni diedemi i seguenti valori delle incognite:

$$\begin{aligned}
\Delta i_1 &= -\ 0''.35 \\
\Delta\Omega_1 &= +\ 5''.97 \\
\lg \Delta\psi &= 0.\ 54256 \\
\lg \Phi &= 0_n.89179 \\
\Delta\mu &= -\ 0''.03648 \\
\Delta L'_o &= +\ 18''.49.
\end{aligned}$$

« Le correzioni sono riferite all'equatore.

Da $\Delta\psi$ e $\Delta\Phi$ deducesi $\Delta\pi_1 = -\ 13''.65$; $\Delta\varphi = +\ 8''.39$.

« Vedesi tosto quante piccole sieno le correzioni agli elementi che sono capaci di soddisfare a pieno alle quattro opposizioni. Solo $\Delta\mu$, che cresce proporzionalmente al tempo, è importante.

« I quattro sistemi corretti diventano i seguenti:

	1° (1891 marzo 2,5 B)	2° (1892 luglio 24,0)	3° (1893 Dic. 26.0)	4° (1895 Aprile 20 0)
M =	223° 21′ 10″.54	1° 52′ 27″.8	143° 23′ 34″.7	274° 15′ 0″.0
L^1_o =	171 20 49. 39	310 1 8 9	91 27 16. 3	222 18 26. 0
Ω^1 =	14 28 4. 27	14 28 5. 8	14 29 8. 5	14 27 45. 2
ι^1 =	18 17 42. 75	18 17 43. 5	18 18 11. 3	18 17 31. 1
φ =	8 38 17. 29	8 38 4. 4	8 42 9. 9	8 43 23. 3
π_1 =	307 59 38. 85	308 8 41. 1	308 3 41. 6	308 3 26. 0
	Equatore 1892. 0)	. . . .	. . . .	(Equatore 1900.0)

« Se negli otto primi membri delle otto equazioni prima scritte si so-

stituiscono i valori delle incognite testè trovati, restano (nel senso O-C) i seguenti minimi valori:

	$\Delta\alpha \cos\delta$	$\Delta\delta$
1ma opposizione	$+ 0^s.01$	$+ 0''.5$
2da opposizione	$- 0.01$	$+ 0.6$
3za opposizione	0.00	$+ 0.4$
4ta opposizione	0.00	0.0

« La somma dei quadrati dei residui discese da 8223″ a 0″.7.

« Se ora poi si calcolano, coi quattro sistemi testè scritti, le posizioni, si ottiene:

1ma opposizione	$- 0^s.01$	$+ 0''.3$
2da opposizione	$- 0.01$	$- 0.4$
3za opposizione	0.00	$+ 1.5$
4ta opposizione	$- 0.13$	$- 0.4$

« Teoricamente i numeri dedotti dai due sistemi dovrebbero coincidere allorchè le equazioni lineari sieno bastevoli; ma detta coincidenza (avendo usato tavole a sei figure nel calcolo dei luoghi cogli elementi) non è possibile; tuttavia l'accordo puossi ritenere soddisfacente.

« Convertendo ora l'ultimo sistema all'eclittica, si hanno in pronto gli elementi per i calcoli futuri per le perturbazioni per la quinta opposizione.

$$
\begin{array}{lllll}
T & = 1895 & \text{Aprile} & 20.0 & \text{Berlino} \\
M & = 274^\circ & 15' & 0''.0 & \\
\pi & = 307 & 7 & 51.0 & \\
L & = 221 & 22 & 51.0 & \\
\omega & = 165 & 29 & 0.7 & \\
\Omega & = 141 & 38 & 50.3 & \\
i & = 7 & 15 & 26.5 & \\
\varphi & = 8 & 43 & 23.3 & \\
\mu & = & & 980''.35166 & \\
m_0 & = 10,7 & & & \\
g & = 8,2. & & &
\end{array}
\left.\begin{matrix} \\ \end{matrix}\right\} \text{(costanti dello splendore)} ».
$$

Meccanica. — *Del moto di un corpo di rivoluzione attorno ad un punto del suo asse.* Nota del Corrispondente E. Padova.

« In una Nota, presentata a questa Accademia il 18 febbraio 1894, ho dimostrato che, se si considera un corpo di rivoluzione girevole attorno ad un punto del suo asse tenuto fisso, soggetto a forze, che hanno una funzione potenziale dipendente dai due soli angoli euleriani ϑ e φ, la via seguita dalla signora Kowalewsky per determinare un integrale diverso da quelli forniti

dai principî generali della dinamica, riconduce sempre a casi già risoluti. Ma, tolta la restrizione che la funzione potenziale U dipenda da due soli angoli, ho trovato, come ora mostrerò, che per quella via si giunge a due nuovi problemi, nei quali si hanno, oltre all'integrale delle forze vive, due altri integrali del primo ordine, uno del quarto grado, l'altro lineare; talchè ambedue questi problemi sono analoghi, sotto il punto di vista della loro integrazione, al problema studiato dalla signora Kowalewsky.

« Prese le coordinate euleriane per fissare la posizione di un corpo girevole attorno ad un punto, e supposti uguali fra loro i due momenti d'inerzia A e B, le equazioni del moto del corpo divengono

$$A\frac{dp}{dt}=(A-C)qr+\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}\vartheta}\left(\cos\vartheta\frac{\partial U}{\partial\varphi}+\frac{\partial U}{\partial\psi}\right)-\cos\varphi\frac{\partial U}{\partial\vartheta}$$

$$A\frac{dq}{dt}=(C-A)pr+\frac{\cos\varphi}{\operatorname{sen}\vartheta}\left(\cos\vartheta\frac{\partial U}{\partial\varphi}+\frac{\partial U}{\partial\psi}\right)+\operatorname{sen}\varphi\frac{\partial U}{\partial\psi}$$

$$C\frac{dr}{dt}=\frac{\partial U}{\partial\varphi},$$

donde, col porre $x_1=p+iq$, si ha

$$(1)\qquad A\frac{dx_1}{dt}=-ir(A-C)x_1+\frac{e^{-i\varphi}}{\operatorname{sen}\vartheta}\left[i\left(\cos\vartheta\frac{\partial U}{\partial\varphi}+\frac{\partial U}{\partial\psi}\right)-\operatorname{sen}\vartheta\frac{\partial U}{\partial\vartheta}\right]$$

o, più brevemente,

$$(2)\qquad \frac{dx_1}{dt}=-irsx_1+S,$$

se si pone

$$s=\frac{A-C}{A},\quad S=\frac{e^{-i\varphi}}{\operatorname{sen}\vartheta}\left[i\left(\cos\vartheta\frac{\partial U}{\partial\varphi}+\frac{\partial U}{\partial\psi}\right)-\operatorname{sen}\vartheta\frac{\partial U}{\partial\vartheta}\right].$$

« Vediamo ora a quali condizioni debbono soddisfare le funzioni U ed α affinchè si abbia identicamente, in forza della (2)

$$\frac{d}{dt}[x_1^2+\alpha]=i\lambda(x_1^2+\alpha)$$

con λ quantità reale. Eseguendo la derivazione e sostituendo a $\frac{dx_1}{dt}$ la sua espressione tolta dalla (2) si ha

$$-2irsx_1^2+2Sx_1+\frac{d\alpha}{dt}=i\lambda(x_1^2+\alpha),$$

donde intanto si vede che deve essere $\lambda=-2rs$. Poniamo in questa equazione per λ il valore trovato ed osserviamo che si ha

$$x_1=ie^{-i\varphi}\operatorname{sen}\vartheta\psi'-e^{-i\varphi}\vartheta',$$
$$r=\varphi'-\cos\vartheta\psi';$$

se α dipende da ϑ, φ, ψ e si uguagliano i coefficienti di ϑ', φ', ψ' nei due membri, si ottengono le tre equazioni

$$(3)\quad \frac{\partial \alpha}{\partial \vartheta} = 2\, e^{-i\varphi}\, \mathrm{S}\,, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi} = -\, 2\, is\alpha\,, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial \psi} + 2\, ie^{-i\varphi} \operatorname{sen} \vartheta \,.\, \mathrm{S} = 2\, is \cos \vartheta \,.\, \alpha\,.$$

« Tra queste eliminiamo S ed otterremo le due equazioni

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \vartheta} = -\, 2\, is\alpha\,, \quad i \operatorname{sen} \vartheta \frac{\partial \alpha}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \alpha}{d\psi} = 2\, is \cos \vartheta \alpha\,,$$

le quali formano, com'è facile verificare, un sistema jacobiano ed un integrale completo di questo sistema è

$$\alpha = c\, e^{-2is(\varphi + c_1\psi)} \operatorname{sen}^{2s(1+c_1)} \frac{\vartheta}{2} \cdot \cos^{2s(1-c_1)} \frac{\vartheta}{2}$$

ove c e c_1 sono costanti arbitrarie. Sostituiamo questa soluzione nella prima delle (3) e separiamo la parte reale dalla parte immaginaria, posto, per brevità,

$$z = 2\,(s-1)\,\varphi + 2\, sc_1\psi\,,$$

otterremo le due equazioni

$$(4)\quad \begin{cases} \cos \vartheta \dfrac{\partial \mathrm{U}}{\partial \varphi} + \dfrac{\partial \mathrm{U}}{\partial \psi} = -\, sc\mathrm{A} \,.\, \operatorname{sen}^{2s(1+c_1)} \dfrac{\vartheta}{2} \cdot \cos^{2s(1-c_1)} \dfrac{\vartheta}{2} \cdot (c_1 + \cos\vartheta) \operatorname{sen} z \\ \dfrac{\partial \mathrm{U}}{\partial \vartheta} = -\, \dfrac{sc\mathrm{A}}{2} \cdot \operatorname{sen}^{2s(1+c_1)-1} \dfrac{\vartheta}{2} \cdot \cos^{2s(1-c_1)-1} \dfrac{\vartheta}{2} \cdot (c_1 + \cos\vartheta) \cos z\,; \end{cases}$$

deriviamo la prima rapporto a ϑ e la seconda rapporto a φ ed a ψ, eliminiamo le derivate seconde ed otterremo

$$(5)\quad \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \varphi} = \frac{sc\mathrm{A}}{4} \operatorname{sen}^{2s(1+c_1)-2} \frac{\vartheta}{2} \cdot \cos^{2s(1-c_1)-2} \frac{\vartheta}{2} \Big[(4s-1)(\cos\vartheta + c_1)^2 + c_1^2 - 1 \Big] \operatorname{sen} z$$

« Uguagliamo fra loro le due espressioni che si ottengono per $\dfrac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial \vartheta \partial \varphi}$, una volta derivando la seconda delle (4) rapporto a φ e l'altra derivando la (5) rapporto a ϑ, avremo, se si esclude il caso di $s = 0$, se cioè si esclude che il corpo considerato sia una sfera,

$$\begin{gathered}(4s^2-1)\cos^3\vartheta + 6\,(2s-1)\, sc_1 \cos^2\vartheta + 3\,(2s-1)(2c_1^2 s - 1)\cos\vartheta \\ + 4\, s^2 c_1^3 - 6\, sc_1 + 2\, c_1 = 0\,,\end{gathered}$$

perchè questa sia identicamente verificata occorre che si abbia $s = \dfrac{1}{2}$, cioè $\mathrm{A} = 2\,\mathrm{C}$ e $c_1\,(c_1^2 - 1) = 0$.

« Tra i momenti d'inerzia del corpo deve dunque sussistere sempre la relazione trovata dalla signora Kowalewsky nel suo problema, quanto alla costante c_1 essa può avere uno dei tre valori $0, 1, -1$. Esaminiamo successivamente questi tre casi e per semplicità supponiamo le unità scelte in modo che sia $C = 1$ e quindi $A = 2$.

« 1°) Se è $c_1 = 0$, dalle (4) e (5) avremo

$$\cos\vartheta \frac{\partial U}{\partial \varphi} + \frac{\partial U}{\partial \psi} = \frac{c}{2} \operatorname{sen}\vartheta \cos\vartheta \operatorname{sen}\varphi, \quad \frac{\partial U}{\partial \varphi} = \frac{c}{2} \operatorname{sen}\vartheta \operatorname{sen}\varphi,$$

$$\frac{\partial U}{\partial \vartheta} = -\frac{c}{2} \cos\vartheta \cos\varphi$$

per cui è

$$U = -\frac{c}{2} \operatorname{sen}\vartheta \cos\varphi,$$

siamo cioè ricondotti al caso studiato dalla sig. Kowalewsky.

« 2°) Se è $c_1 = 1$, abbiamo dalle (4) e (5)

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi} = c \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \operatorname{sen}(\psi - \varphi), \quad \frac{\partial U}{\partial \vartheta} = c \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \operatorname{sen}(\varphi - \psi),$$

$$\frac{\partial U}{\partial \vartheta} = -\frac{c}{2} \operatorname{sen}\vartheta \cos(\psi - \varphi)$$

donde si trae

$$U = c \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \cos(\psi - \varphi),$$

in questo caso si ha

$$\frac{d}{dt}\left[x_1^2 + c\, e^{-i(\varphi+\psi)} \operatorname{sen}^2 \frac{\vartheta}{2}\right] = -ir\left[x_1^2 + c e^{-i(\varphi+\psi)} \operatorname{sen}^2 \frac{\vartheta}{2}\right] \tag{6}$$

e se x_2 indica l'espressione $p - iq$, coniugata di x_1, abbiamo l'integrale del quarto grado

$$\left[x_1^2 + c e^{-i(\varphi+\psi)} \operatorname{sen}^2 \frac{\vartheta}{2}\right]\left[x_2^2 + c e^{i(\varphi+\psi)} \operatorname{sen}^2 \frac{\vartheta}{2}\right] = h_1$$

ossia

$$(p^2 + q^2)^2 + 2c \operatorname{sen}^2 \frac{\vartheta}{2}\left[(p^2 - q^2)\cos(\varphi + \psi) - 2pq \operatorname{sen}(\varphi + \psi)\right]$$
$$+ c^2 \operatorname{sen}^4 \frac{\vartheta}{2} = h_1 .$$

« Oltre a questo integrale se ne ha adesso uno del primo grado, che si determina facilmente osservando che U dipende soltanto da $\psi - \varphi$ e da ϑ, e la forza viva è indipendente da φ e da ψ, questo integrale è $\frac{\partial T}{\partial \varphi'} + \frac{\partial T}{\partial \psi'} = h_2$ ossia

$$2(p \operatorname{sen}\varphi + q \cos\varphi) \operatorname{sen}\vartheta + r(1 - \cos\vartheta) = h_2$$

« Tutto questo può anche essere direttamente verificato partendo dalle equazioni del moto, che ora sono

$$2\frac{dp}{dt}=qr+\frac{c}{2}\operatorname{sen}\vartheta\cos\psi\,,\quad 2\frac{dq}{dt}=-pr-\frac{c}{2}\operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen}\psi\,,$$

$$\frac{dr}{dt}=c\cos^2\frac{\vartheta}{2}\operatorname{sen}(\psi-\varphi)\,,$$

dalle quali si ha

$$2(p+iq)\frac{d(p+iq)}{dt}$$

$$=-ir(p+iq)^2+ce^{-i(\varphi+\psi)}\operatorname{sen}^2\frac{\vartheta}{2}\left[2i\cos^2\frac{\vartheta}{2}\psi'-\frac{\cos\frac{\vartheta}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\vartheta}{2}}\vartheta'\right],$$

ed essendo

$$\frac{d}{dt}\left[ce^{-i(\varphi+\psi)}\operatorname{sen}^2\frac{\vartheta}{2}\right]=ce^{-i(\varphi+\psi)}\operatorname{sen}^2\frac{\vartheta}{2}\left[-i(\varphi'+\psi')+\frac{\cos\frac{\vartheta}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\vartheta}{2}}\vartheta'\right],$$

si avrà, per addizione,

$$\frac{d}{dt}\left[(p+iq)^2+ce^{-i(\varphi+\psi)}\operatorname{sen}^2\frac{\vartheta}{2}\right]=-ir\left[(p+iq)^2+ce^{-i(\varphi+\psi)}\operatorname{sen}^2\frac{\vartheta}{2}\right],$$

che è appunto la (6).

« 3°) Se è $c_1=-1$, le (4), (5) danno

$$\frac{\partial U}{\partial\vartheta}=\frac{c}{2}\operatorname{sen}\vartheta\cos(\varphi+\psi)\,,\quad \frac{\partial U}{\partial\varphi}=-c\operatorname{sen}^2\frac{\vartheta}{2}\operatorname{sen}(\varphi+\psi)\,,$$

$$\frac{\partial U}{\partial\psi}=-c\operatorname{sen}^2\frac{\vartheta}{2}\operatorname{sen}(\varphi+\psi)$$

donde

$$U=c\operatorname{sen}^2\frac{\vartheta}{2}\cos(\varphi+\psi)\,,$$

si ha allora l'integrale di quarto grado

$$\left[(p+iq)^2+ce^{-i(\varphi-\psi)}\cos^2\frac{\vartheta}{2}\right]\left[(p-iq)^2+ce^{i(\varphi-\psi)}\cos^2\frac{\vartheta}{2}\right]=h_1\,,$$

e l'altro del primo

$$2(p\operatorname{sen}\varphi+q\cos\varphi)\operatorname{sen}\vartheta-r(1+\cos\vartheta)=h_2$$

la cui esistenza resulta subito dal fatto che U non dipende che da ϑ e da $\varphi+\psi$.

« Alla ristretta serie di problemi di movimento di un corpo rigido, che ammettono integrali uniformi i quali hanno soltanto poli nel piano della variabile t, ne vengono così aggiunti due nuovi ».

Fisica. — *Sulla doppia rifrazione delle radiazioni elettriche, particolarmente nel gesso.* Nota del Corrisp. AUGUSTO RIGHI.

« Dopo che ebbi dimostrata la doppia rifrazione delle radiazioni elettriche nel legno d'abete [1], altri sperimentatori riscontrarono lo stesso fenomeno, sia in quel corpo che in altri. Così il sig. Mack [2] ripetè, confermandole senza conoscerle in precedenza, alcune delle mie esperienze, il sig. Lebedew [3] ed il sig. Garbasso [4] ottennero la doppia rifrazione, il primo con cristalli di zolfo, ed il secondo col gesso, come pure, quantunque con minor sicurezza, collo spato.

« Siccome quest'ultimo lavoro giunse a mia cognizione mentre mi occupavo io pure di analoghe ricerche, così potei ripetere le interessanti esperienze in esso descritte. A ciò mi spinse anche la circostanza che ad alcune di queste mi parve si potesse muovere una obbiezione, la quale però, è giustizia rilevarlo, non poteva essere preveduta dal loro autore; come pure il desiderio di vedere se le mie esperienze avessero o no confermato il singolare risultato ottenuto col gesso, secondo cui « sembrerebbe che le direzioni » possibili di vibrazione per la luce e per i raggi di Hertz non sieno le » stesse, ma anzi che le due prime siano prossimamente a 45° dalle altre » due. »

« L'obbiezione mi era suggerita da alcuni fatti, i quali saranno esposti in una Memoria che sto preparando. Ecco in che consistono. Se si dispone verticalmente l'oscillatore e orizzontalmente il risonatore, o viceversa, si fanno apparire scintille in quest'ultimo, spesso assai vivaci, collocando fra i due apparecchi una massa dielettrica che abbia forma e posizione opportuna.

« Se, per esempio, il dielettrico ha forma di parallelepipedo o di cilindro, colla maggior dimensione perpendicolare alla direzione in cui si propagano

(1) *Sulle oscillazioni elettriche a piccola lunghezza d'onda ecc.* Mem. della R. Accad. di Bologna, V serie, t. IV, pag. 487 (1894).

(2) Wied. Ann. 1894, n. 11. Cfr. Wied. Ann. 1895, n. 6.

(3) Wied. Ann. 1895, n. 9. Di questo lavoro fu da me comunicato un sunto alla R. Acc. di Bologna nella seduta del 12 maggio 1895 (v. Rendiconti), in base ad informazioni verbali avute dall'Autore.

(4) Atti della R. Acc. di Torino, v. XXX. In questo lavoro il sig. Garbasso, comentando una frase di una mia Nota, sembra ragionare ammettendo l'ipotesi che io ignori affatto essere la doppia rifrazione nei corpi cristallizzati una conseguenza della teoria di Maxwell, e del fatto che la costante dielettrica ha valori diversi nelle varie direzioni. Spero di non essere tacciato di poca modestia affermando che non credevo potesse ammettersi una tale ipotesi. L'equivoco del resto proviene da un' inavvertita omissione nel testo del § 48 della mia Memoria, che avrò occasione di corregere in una ristampa dei miei lavori sulle radiazioni elettriche.

le onde, e lo si fà girare intorno a questa direzione, si vede generalmente la scintilla nel risonatore; essa è massima quando il dielettrico è a circa 45° colla direzione del risonatore e con quella dell' asse dell' oscillatore, e sparisce quando il dielettrico è parallelo ad una di quelle direzioni.

« Si vede così che l'apparire di scintille nel risonatore, allorchè fra i due apparecchi vien portato un dielettrico, e lo sparire regolare di esse quattro volte ogni giro allorchè il dielettrico vien fatto girare, non è sempre indizio di doppia rifrazione da esso prodotta.

« Nelle mie esperienze, onde cercare di mettermi al coperto da quella obbiezione, ho collocato in linea retta fra oscillatore e risonatore un diaframma metallico avente un' apertura circolare (diametro 8 c.), ed ho messo la lastra cristallina, sempre alquanto più larga dell'apertura, contro di questa e dalla parte dell'oscillatore. Così fece anche il sig. Garbasso in una delle sue esperienze col gesso, la quale quindi va illesa dall'obbiezione che può colpire le esperienze fatte collocando semplicemente davanti al risonatore un cristallo birefrangente.

« Ho sperimentato con un romboedro di spato, avente i suoi tre spigoli lunghi 11, 10 e 5,1 centimetri, gentilmente prestatomi dal collega prof. Bombicci, e con diverse lastre di gesso di 3 a 5 centimetri di spessore. Onde evitare completamente ogni possibilità d'errori, provenienti dalla causa accennata più sopra, ho tagliato alcune di queste lastre in modo da far loro assumere la forma di cilindri retti, colle basi circolari parallele alla sfaldatura principale, e le ho collocate una ad una contro il diaframma, in modo da essere concentriche coll'apertura in esso esistente.

« Dò in questo scritto un breve cenno sui risultati da me ottenuti, riservando alla Memoria che sto preparando, una completa esposizione delle mie esperienze.

« *Spato*. Non si ha scintilla nel risonatore (sempre collocato in direzione perpendicolare a quella dell'oscillatore), anche se è estremamente sensibile, allorchè la sezione principale del cristallo è parallela o all'oscillatore o al risonatore, mentre per tutte le altre orientazioni si hanno scintille, che assumono la massima vivacità allorchè la sezione principale è a 45° dal piano di vibrazione.

« Dunque lo spato produce indubbiamente la doppia rifrazione dei raggi di forza elettrica.

« *Gesso*. Con questo corpo ho ottenuto, come già il sig. Garbasso, effetti simili a quelli dati dallo spato, e cioè ho osservato che esistono due orientazioni, fra loro ortogonali, per le quali le scintille mancano, mentre queste appaiono colle altre orientazioni, ed assumono la massima vivacità con orientazioni che sono sensibilmente a 45° dalle precedenti.

« Resta dunque confermata la doppia rifrazione delle radiazioni elettriche nel gesso. Ma cessa l'accordo fra le mie esperienze e quelle del sig. Garbasso,

in quanto alla relazione che esiste fra il fenomeno descritto, e l'analogo fenomeno ottico, che si osserva ponendo il gesso fra due nicol incrociati.

« Per esaminare questa relazione, ho preso il partito di segnare sulla lastra stessa di gesso le direzioni di estinzione, sia per le radiazioni luminose che per le radiazioni elettriche, e cioè quelle direzioni che coincidono colla direzione delle vibrazioni incidenti allorchè, girando la lastra di gesso nel proprio piano, si arriva a ristabilire l'oscurità nel caso della esperienza ottica, o a far sparire le scintille del risonatore nel caso della esperienza elettrica. Quelle direzioni, nel caso della esperienza ottica, sono quelle dei due assi di elasticitá ottica, che giacciono nel piano di simmetria (al quale il terzo asse è perpendicolare), ossia quelle delle due bisettrici dell' angolo degli assi ottici.

« Per segnare le due direzioni di estinzione ottica ho adoperato come polarizzatore una lastra di vetro nero disposta ben verticalmente, e come analizzatore un nicol, che veniva girato sino ad estinguere la luce che verso di esso rifletteva orizzontalmente, sotto l'angolo di polarizzazione, la lastra di vetro. Interposto il gesso, e fatto girare sino ad ottenere l'estinzione, segnavo sopra una delle sue faccie, coll'aiuto del filo a piombo, la direzione verticale, che è quella delle vibrazioni incidenti. Ottenevo così sulla lastra due rette, che ho trovato essere sempre, come appunto dovevano esserlo, sensibilmente ortogonali.

« Un secondo sistema di due rette, che pure sono riuscite sensibilmente perpendicolari fra loro, segnavo sulla lastra, facendo l'analoga operazione colle radiazioni elettriche, dopo avere dato con ogni cura all'oscillatore una direzione verticale. Se non chè, siccome allorquando si gira lentamente la lastra di gesso nel proprio piano, cessano ad un dato momento le scintille nel risonatore, per non ricomparire che quando la lastra viene girata ancora di alcuni gradi, ho assunto come orientazione di estinzione le medie fra quelle che corrispondono allo sparire delle scintille muovendo la lastra prima in un senso, poi in senso contrario.

« Il risultato, che costantemente ho ottenuto, è stato il seguente, e cioè che, mentre i due sistemi non coincidono affatto fra di loro, uno di essi non è inclinato a circa 45° sull'altro, come risultò al sig. Garbasso. Invece, una delle due rette di un sistema fa con quelle dell'altro degli angoli, il minore dei quali ha variato nelle mie esperienze fra 36° e 40°.

« Quest'angolo è stato calcolato in base a misure di lunghezze fatte sulla lastra, e l'incertezza sul suo valore dipende dal metodo di sperimentare che non concede molta precisione, giacchè differenze fino di 3 o 4 gradi si sono manifestate anche ripetendo più volte le determinazioni sopra una stessa lastra.

« Non può sorprendere che le direzioni di estinzione ottica non coincidano con quelle di estinzione per le radiazioni elettriche; anzi la cosa era

a prevedersi, in quanto che è noto come nel gesso, non solo gli assi ottici, ma anche le due bisettrici del loro angolo variano di orientazione al variare della lunghezza d'onda. E fu questo il motivo che mi distolse per l'addietro dal tentare l'esperienza della doppia rifrazione delle radiazioni elettriche col gesso, benchè questo corpo birefrangente fosse forse il solo che si poteva sperare di avere in dimensioni sufficienti per lo scopo.

« La determinazione approssimativa da me fatta, conduce ad una notevole conseguenza. È noto che pel gesso la bisettrice dell'angolo acuto degli assi ottici fa un angolo di circa 38° con uno degli assi cristallini, e precisamente con quello al quale è perpendicolare una delle due sfaldature secondarie, che suol chiamarsi *concoide*, onde distinguerla dall'altra sfaldatura secondaria che è nettamente *fibrosa*. Ne consegue che una delle due direzioni di estinzione per le radiazioni elettriche coincide, o quasi, con uno degli assi di cristallizzazione, mentre l'altra coincide, o quasi, colla direzione della sfaldatura secondaria non fibrosa. Quest'ultimo fatto ho in seguito più volte verificato sia direttamente, sia (il che è assai meglio per la circostanza che la sfaldatura fibrosa è assai più netta dell'altra) misurando gli angoli delle direzioni d'estinzione colla direzione della sfaldatura fibrosa. Uno di questi angoli è stato trovato sempre assai prossimo a 67°, che è il valore approssimato dell'angolo fra le due sfaldature.

« Può darsi che la coincidenza fra una delle direzioni d'estinzione per le radiazioni elettriche ed uno degli assi cristallini non sia rigorosa, ma tenda a divenire tale quando s'adoperino onde di più in più lunghe. Esisterebbe quindi per le radiazioni a grande lunghezza d'onda un più stretto legame fra la forma cristallina e la doppia rifrazione, che non nel caso delle radiazioni luminose, risultato questo che aumenterebbe assai d'importanza qualora venisse esteso ad altri cristalli del sistema monoclino, o qualora si trovassero proprietà analoghe in cristalli triclini.

« È noto infatti che nel gesso, il quale essendo monoclino possiede la doppia rifrazione a due assi, gli assi ottici giacciono nel piano di simmetria (che è parallelo alla sfaldatura principale), senza però che le loro direzioni, nè quelle delle bisettrici del loro angolo, abbiano alcun rapporto colle direzioni dei due assi cristallini che giacciono nel piano di simmetria. Fra l'elissoide di polarizzazione e gli assi di cristallizzazione esiste dunque, nel caso del gesso, quest'unica relazione, e cioè che l'asse medio dell'elissoide coincide con uno dei tre assi cristallini, mentre gli altri due assi dell'elissoide hanno direzioni indipendenti dalla forma cristallina, anzi variabili colla lunghezza d'onda. Invece, nella doppia rifrazione di lunghe onde, un altro asse dell'elissoide coinciderebbe con un altro asse cristallino, e precisamente con quello cui è perpendicolare la sfaldatura secondaria non fibrosa.

« In ogni caso ciò è almeno approssimativamente vero per le mie esperienze eseguite sul gesso con onde di 10,6 centimetri di lunghezza.

« Anche colla riflessione delle radiazioni elettriche su corpi cristallizzati non isotropi, ho avuto chiaro indizio della loro birefrangenza, come esporrò in altra occasione ».

Matematica. — *Sulla teoria degli iperspazii.* Nota di G. Ricci, presentata dal Socio Cremona.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Fisica. — *Sull'uso dei galleggianti per l'indicazione esatta del livello dei liquidi.* Nota di G. Guglielmo, presentata dal Socio Blaserna [1].

« Allorquando si vuol usare un galleggiante perchè indichi esattamente le variazioni del livello d'un liquido, s'incontrano gl'inconvenienti che seguono:

1°. Il galleggiante è spinto contro le pareti, sia che il liquido lo bagni e bagni quindi anche le pareti del recipiente che lo contiene, e quindi formi presso entrambi menischi concavi, sia che il liquido non bagni il galleggiante e quindi neppure le pareti e formi presso entrambi menischi convessi. Anche galleggianti nell'acqua spalmati di grasso e paraffina e perciò imperfettamente bagnati, presto o tardi sono spinti contro le pareti. Allora l'attrito impedisce al galleggiante di obbedire liberamente alle variazioni di livello, e gli ostacoli (punte, fili ecc.) che impediscono al galleggiante di andare contro le pareti, generano pur essi un attrito sensibile.

2°. Il liquido formando un menisco concavo o convesso, attorno al galleggiante, lo rende soggetto alla tensione superficiale ed alle variazioni del suo valore e dell'angolo sotto cui agisce.

3°. La linea d'intersezione delle superfici libere del galleggiante e del liquido facilmente si sposta, producendo variazioni della quantità di liquido aderente, e dell'angolo di raccordamento.

« Cercando di eliminare alcuni inconvenienti dello sferometro a liquido da me precedentemente descritto [2], ho collocato prima sul mercurio ed in seguito anche sull'acqua galleggianti, cercando d'evitare le suddette cause d'errore, e credo che essi possano essere utili nei moltissimi casi in cui occorre conoscere con esattezza la posizione del livello d'un liquido e misurarne le variazioni.

« **Galleggianti nell'acqua.** — Se si colloca sull'acqua una capsula abbastanza leggera, cilindrica o emisferica, oppure un tubo chiuso in fondo, di

(1) Lavoro eseguito nel Gabinetto Fisico dell'Università di Cagliari. Luglio, 1895.

(2) Atti della R. Acc. dei Lincei, 1893.

vetro, rame o alluminio ecc., il cui orlo sia tagliente e giaccia in un piano perpendicolare all'asse di figura, e la si zavorra convenientemente in modo che galleggi coll'orlo orizzontale, e si aumenta progressivamente il peso della zavorra finchè il piano dell'orlo coincida col livello del liquido, tale galleggiante non è sottoposto alle suddette cause d'errore. Difatti:

1°. Non è più spinto verso le pareti, e se lo si spinge contro, esso sale lungo il menisco, e quando sia lasciato libero, obbedendo alla gravità ridiscende e si allontana così dalle pareti.

2°. Poichè la superficie libera del liquido a contatto del galleggiante è piana ed orizzontale, la componente verticale della tensione superficiale è nulla, ed il galleggiante non è soggetto verticalmente che alla gravità ed alla spinta del liquido; queste si equilibrano solo quando trovasi al disotto del livello un volume perfettamente determinato del galleggiante. Se questo viene sollevato o depresso un poco la superficie del liquido aderente, s'incurva all'insù o all'ingiù e la componente verticale della tensione superficiale, tende a ricondurre il galleggiante alla determinata posizione d'equilibrio, cospirando colla risultante della spinta e della gravità.

3°. La linea d'intersezione delle superfici libere del liquido e del galleggiante coincide invariabilmente collo spigolo dell'orlo, purchè esso sia tagliente e la superficie esterna del galleggiante sia liscia e priva d'untuosità che potrebbero diminuirne l'adesione per l'acqua. Manca quindi qualsiasi causa che possa far variare l'immersione del galleggiante.

« Talvolta è utile aumentare un poco il peso di questo in modo che il liquido si deprima leggermente attorno ad esso; ciò aumentando, la repulsione delle pareti lo rende meno soggetto a spostarsi orizzontalmente, mentre l'azione delle variazioni della tensione superficiale è, se non nulla, trascurabile.

« Si potrebbe temere che l'acqua per adesione si propagasse lungo la superficie libera del galleggiante e dopo un tempo più o meno lungo lo facesse affondare; però ciò non avviene. Ho lasciato per varî giorni e settimane capsule di rame e di alluminio di diametro vario da 4 a 20 mm. galleggianti nelle condizioni suddette sopra tavoli esposti a scosse e spostamenti senza che esse si sommergessero, specialmente se leggere. Dubitando che ciò potesse essere causato da traccie di grasso, ho pulito accuratamente ed in varî modi tali capsule senza che perciò esse cessassero di galleggiare indefinitamente. Un solido il quale nelle condizioni ordinarie è bagnato da un liquido, può cessare di esserlo quando l'intersezione delle superfici libere del liquido e del solido coincida con uno spigolo vivo di quest'ultimo, e questo non sporga, o sporga pochissimo, dal liquido; difatti in questo caso l'adesione tra solido e liquido è diminuita, perchè manca tutta la parte di solido che nelle condizioni ordinarie sporgerebbe dal liquido.

« Per scuotimenti troppo forti tuttavia la capsula potrebbe affondare, essendo coperta da un'onda cui non obbedisce abbastanza rapidamente, o

essendo trascinata in basso dalla velocità acquistata; per evitare ciò si può riempire la capsula di paraffina, o turarla con un disco di sovero e paraffina, regolando però il peso totale nel modo suddetto.

« Capsule di metallo, molto leggere, si possono avere facilmente comprimendo un disco di lamina sottile di rame o meglio alluminio entro uno stampo con un pezzo di ferro che s'adatti nello stampo lasciando un piccolo intervallo. Capsule molto piccole, di 4 mm. di diametro sono quelle dei fucili da caccia a percussione; di solito esse son troppo pesanti e sebbene galleggino nell'acqua producendo un leggero menisco convesso non potrebbero sopportare indici fuorchè leggerissimi; si rendono più leggere togliendo il fulminato di mercurio e assottigliando la parete con smeriglio o lime fini. Esse vanno bene entro tubi di 10 mm. circa di diametro, come le burette e le campanelle e possono sostituire con vantaggio della precisione il galleggiante di Erdmann troppo soggetto all'attrito ed alla capillarità.

« In generale è più comodo l'uso di un tubo d'assaggio di 5 a 20 mm. o più di diametro, tagliato normalmente all'asse col diamante o col carbone (in modo che lo spigolo dell'orlo sia vivo, non smerigliato), zavorrato convenientemente e chiuso alla sommità da un disco di sovero che trovasi un po' sotto l'orlo e da uno strato di paraffina. Questa deve avere la superficie liscia e leggermente declive verso l'esterno, così il tubo non solo è insommergibile, ma qualora venga spinto sott'acqua, di solito dopo ritornato a galla non ritiene acqua aderente e continua a galleggiare nelle condizioni e all'altezza primitive, senza che occorra asciugarlo. Si può anche chiudere il tubo, superiormente, con una lamina piana, rotonda o quadrata, sporgente un po' dalle pareti e coll'orlo tagliente.

« Su questo tubo si possono collocare scale, indici ed altri oggetti relativamente pesanti, senza che esso corra pericolo di rovesciarsi oppure d'inclinarsi; qualora però gli oggetti che si vogliono collocare sul galleggiante fossero tanto pesanti e tanto alti da comprometterne la stabilità, converrebbe ricorrere alla disposizione usata dal Tralles nel suo areometro per lo stesso scopo, cioè ripiegare all'ingiù l'asta che porta la scala, in modo che questa venga a trovarsi più in basso del galleggiante ma all'esterno del recipiente; assicurando inoltre l'equilibrio con opportuni contrappesi. Così p. es. se si volesse far portare a un tubo galleggiante di pochi centimetri d'altezza una scala lunga parecchi decimetri converrebbe tale disposizione o una simile.

« Il galleggiante, qualunque sia la sua forma, deve avere tale sezione che l'intervallo fra il suo orlo e la parete del recipiente sia di circa 6 mm. Se tale intervallo è troppo grande, il galleggiante è soggetto a navigare alla deriva alla superficie del liquido, ciò che può essere incomodo e dannoso per la precisione delle osservazioni; se l'intervallo suddetto è troppo piccolo, la superficie del liquido attorno al galleggiante è necessariamente inclinata, e questo è soggetto alla tensione superficiale del liquido e alle variazioni che

ne risultano. Qualora però il recipiente in cui si colloca il galleggiante dovesse essere necessariamente molto grande, si può impedire assai facilmente ed in varî modi, che questo navighi.

« Si può collocare sulla superficie dell'acqua e contro le pareti del recipiente un largo anello galleggiante di sovero o di legno, e porre il galleggiante indicatore del livello in mezzo dell'anello, dove rimane fermo trattenuto dalla gravità, mentre l'anello rimane fermo a contatto delle pareti per effetto di capillarità. Invece d'un anello si possono usare tre pezzi di sovero o di legno riuniti da astine di legno e formanti un triangolo nel mezzo del quale si colloca il galleggiante. Si può anche collocare nel recipiente un tubo di vetro sporgente un poco dal liquido, che riposi sul fondo su tre piedi, (p. es. su tre gocce di ceralacca) in modo che vi sia comunicazione fra esso e il recipiente, e collocare entro questo tubo il galleggiante, che così rimane protetto dalle correnti che si possono produrre nel liquido. Il diametro interno dell'anello o del tubo o del cerchio contenuto fra i tre pezzi di sovero deve essere circa 12 mm. maggiore del diametro dell'orlo del galleggiante per evitare gli accennati inconvenienti.

« È utile spesso che il galleggiante conservi inoltre una orientazione determinata o nello spazio, o rispetto al recipiente. Si ottiene facilmente la prima collocando sul galleggiante o dentro di esso sbarrette d'acciaio magnetizzate; si ottiene più facilmente la seconda (e quindi anche la prima se il recipiente è immobile) usando galleggianti di sezione quadrata, o rettangolari, o terminati superiormente da una lamina quadrata, immersi in recipienti o tubi, pure a sezione quadrata o rettangolare, oppure circondati con quadrati o rettangoli di sovero o legno. Per effetto dell'apparente repulsione delle pareti, il galleggiante si dispone colle faccie parallelle a quelle del recipiente o tubo, o rettangolo galleggiante.

« Volendo misurare con grande esattezza variazioni di livello, conviene fissare sul galleggiante una scala verticale divisa in decimi o centesimi di millimetro, che si osserva con un microscopio con reticolo disposto coll'asse ottico orizzontale e facente alle divisioni un angolo (orizzontale) un po' diverso da 90°. In tal modo, anche disponendo approssimativamente il microscopio, si ottiene facilmente che una qualche divisione trovisi nel campo e che un punto della divisione trovisi alla distanza conveniente per essere vista nettamente. Se nel corso della misura il galleggiante s'avvicina o s'allontana un poco, saranno visti nettamente i punti più lontani o più vicini della divisione che si osserva.

« Se la variazione di livello che si vuol misurare è un po' grande, siccome è difficile che la scala sia divisa in tutta la sua estensione in decimi o centesimi di millimetro, per apprezzare le frazioni di millimetro è utile che il microscopio sia provvisto di micrometro oculare o di reticolo micrometrico, cioè di un filo orizzontale mobile nel piano del reticolo mediante

una vite micrometrica. Ho già osservato che una scala un po' lunga può essere portata dal galleggiante senza pregiudizio nè della stabilità nè dell'esattezza in un modo analogo a quello usato da Tralles nel suo areometro.

« **Galleggianti nel mercurio.** — Se il liquido è mercurio, la forma del galleggiante cambia, sebbene il modo col quale s'ottiene l'invariabilità della sua posizione sia lo stesso. Se si colloca sul mercurio una lente convergente, o un vetro da orologio poco convesso, il cui orlo sia tagliente, colla faccia convessa in basso, il mercurio dovendo fare col vetro un angolo di circa 45°, nell'aria, forma un menisco convesso, vicino alle pareti ed un menisco concavo, sollevandosi, sotto la lente e quindi questa viene spinta lungi dalle pareti. Collocando pesi sulla lente, si può farla immergere tanto che il suo orlo giaccia nel piano della superficie del mercurio, ed allora questa a contatto colla lente rimane piana e orizzontale e senza azione sulla lente, ed inoltre la linea di contatto coincide sensibilmente collo spigolo dell'orlo. Quindi anche in questo caso il galleggiante nella sua posizione d'equilibrio è soggetto solo alla gravità ed alla spinta del liquido che si distruggono, e quando venga spostato da tale posizione, anche la tensione superficiale del mercurio tende a ricondurvelo.

« Invece della lente che non si può facilmente avere delle dimensioni opportune, ho usato in seguito un disco di vetro collo spigolo inferiore ben vivo e tagliente quale si ottiene col carbone o col diamante sulla faccia opposta al segno. Sotto questo disco ed in mezzo fissavo con balsamo del Canadà una lamina di vetro meno estesa del disco e di peso quasi uguale al peso totale del galleggiante, moltiplicato per il rapporto della densità del vetro e del mercurio, e riempivo con ceralacca o paraffina, l'angolo rientrante formato dall'unione delle due lamine. Collocando questo galleggiante nel mercurio, esso s'immerge fino alla faccia inferiore del disco, alla quale il mercurio aderisce rimanendo press'a poco piano tutt'attorno. Se quest'ultima condizione non si verifica, si aggiungono o tolgono pesi al galleggiante finchè la superficie del mercurio diventa piana.

« Se si spinge questo galleggiante contro le pareti, esso si stacca in parte dal mercurio vincendo l'adesione, e per adesione solleva del mercurio vincendo la gravità, queste due forze tendono dunque a tenerlo lontano dalle pareti. La costanza della quantità immersa è ottenuta nel modo già considerato.

« A causa della forte adesione del mercurio pel vetro, questo galleggiante può sopportare pesi relativamente grandi senza rovesciarsi; quando però i pesi che esso deve sostenere siano molto piccoli, si può usare più semplicemente in sua vece una lamina di vetro sottile, p. es. un vetrino copri-oggetti da microscopio che produce sul mercurio una depressione minima e che quindi soddisfa alle condizioni dei galleggianti più complessi.

« **Esperienze sui galleggianti.** — Mi sono assicurato coll'esperienza della invariabilità dell'altezza dei galleggianti, costruiti nei modi suesposti, rispetto al livello del liquido, sperimentando specialmente coll'acqua che a causa della piccola densità offriva maggiori probabilità di variazioni. Occorreva anzitutto avere un livello rigorosamente costante; tale non risultò quello d'una determinata quantità d'acqua in un recipiente di piccola sezione, a causa delle variazioni della quantità d'acqua contenuta nel menisco; usando un recipiente coll'orlo piano e riempito fino all'orlo in modo che non si formasse menisco, il livello è bensì costante, ma il galleggiante è soggetto a spostarsi lateralmente ciò che rende l'osservazione incomoda e di valore dubbio. Ho quindi usato larghi recipienti, coll'orlo piano, e riempiti fino all'orlo, ed ho impedito gli spostamenti laterali del galleggiante con uno dei modi precedentemente indicati; le variazioni del menisco che si formava presso il tubo o l'anello di sovero non potevano far variare sensibilmente il livello dell'estesa superficie dell'acqua.

« Sopra un galleggiante in forma di tubo, di 24 mm. di diametro, collocai un micrometro oculare di 1 cm. diviso in decimi di millimetro ed osservai le divisioni col cannocchiale d'un catetometro del Miller d'Innsbrück, provvisto di reticolo micrometrico, sustituendo all'obbiettivo telescopico un obbiettivo da microscopio. Le immagini, per effetto di tale sostituzione, non risultavano punto nette, ma a causa del forte ingrandimento (per portare il reticolo dall'immagine d'una divisione alla seguente occorrevano 4 giri della vite la cui testa era divisa in 100 parti) si potevano misurare spostamenti piccolissimi.

« La posizione d'equilibrio del galleggiante si mantenne assolutamente costante, anche dopo che esso venne fortemente depresso o sollevato, come pure dopo che venne tolto dall'acqua e poi rimesso lasciandolo cadere da diverse piccole altezze, e così pure dopo aver fatto variare il livello del liquido aggiungendone o togliendone e averlo riportato poi nello stato di prima.

« Anche con un galleggiante di 6 mm. di diametro nel quale le variazioni dovrebbero essere più sensibili, esse risultarono minime o nulle; però se il galleggiante di 6 mm. di diametro era imperfetto, p. es. cogli orli, anzichè taglienti, scheggiati e un po' arrotondati da una pietra molare troppo grossolana, erano osservabili spostamenti che salirono a tre centesimi di millimetro.

« Un'altra prova che la tensione superficiale del liquido non altera la posizione del galleggiante ben costruito, si può avere avvicinando alla superficie dell'acqua un pezzo di cotone imbevuto d'etere o alcool. È noto che i vapori condensandosi sull'acqua ne abbassano la tensione superficiale, per cui un areometro galleggiante viene a sollevarsi sensibilmente. Invece il galleggiante suddetto subì variazioni d'altezza appena osservabili col microscopio, che sparivano quando il peso del galleggiante era convenientemente regolato.

« Avendo avuto in seguito un microscopio catetometro che ingrandiva

circa 100 volte e dava immagini nette ho ripetuto le esperienze con identico risultato. Si può quindi esser sicuri che nelle condizioni ordinarie, tali galleggianti, non essendo sottoposti a scosse nè ad altre perturbazioni, indicano con completa esattezza, la posizione del livello d'un liquido e le sue variazioni.

« **Applicazione dei galleggianti. 1. Manometro e elettrometro.** — La sensibilità e precisione dei barometri e manometri ad aria libera viene notevolmente aumentata coll'uso di questi galleggianti. Ne ho fatto la prova in un caso importante qual'è quello della misura delle pressioni elettrostatiche e quindi dei potenziali.

« Ho usato un recipiente cilindrico di zinco, di 25 cm. di diametro, munito alla sommità di un orlo piano largo 12 cm. che faceva da anello di guardia e comunicante con un altro recipiente di 3 cm. di diametro nel quale si trovava il galleggiante (1). Riempivo d'acqua i due recipienti finchè essa giungesse all'orlo del grande senza formarsi menisco, e vi collocavo al disopra a nota distanza d dall'acqua un disco di zinco di 25 cm. di diametro. Osservavo una scala divisa in decimi di millimetro, portata dal galleggiante, mediante il cannocchiale con reticolo micrometrico. Ponendo l'acqua in comunicazione col suolo e portando il disco sovrapposto a un potenziale V abbastanza elevato, osservavo nel galleggiante uno spostamento h dal quale si ottiene:

$$V = \left(d - \frac{r^2}{R^2}h\right)\sqrt{8\pi h\left(1+\frac{r^2}{R^2}\right)}$$

essendo R ed r i raggi dei due recipienti.

« Maggiori particolari ed il confronto con altre forme di elettrometro assoluto seguono in altra Nota.

« **Livella ad acqua e a mercurio.** — Un altro caso in cui è utile l'uso dei galleggianti senza menisco è quello della livella a vasi comunicanti, (livella ad acqua). Essa ha il grande vantaggio che i due livelli si dispongono da sè, senza errore possibile in un piano orizzontale, però l'osservazione con tale livella è poco precisa nonostante le sue grandi dimensioni. Essa viene a guadagnare notevolmente in esattezza ed anche in semplicità e comodità qualora si usino i suddetti galleggianti.

« Una forma molto semplice di livella si ha allora usando un bicchiere d'acqua nel quale si collocano due galleggianti muniti di traguardi, ai quali s'impedisce di navigare e di ruotare sul proprio asse nei modi già indicati. Si può anche usare un tubo ad U i cui rami verticali siano distanti 10, 20 o 30 cm. e contengano i galleggianti; è quasi affatto inutile che questi e quindi anche il tubo abbiano un grande diametro, perchè con galleggianti

(1) Questo apparecchio aveva dimensioni troppo incomode, ed ho usato in seguito un recipiente di 10 cm. con orlo di 5 cm. comunicante con un altro recipiente di circa 2 cm. di diametro, in cui si trovava un galleggiante di 6 mm. di diametro.

di 6 mm. di diametro e tubi di 18 a 20 mm. si ha tutta la precisione possibile colla visione ad occhio nudo; il solo vantaggio di un maggior diametro dei galleggianti, sta nella possibilità di far loro sopportare maggiori pesi.

« Ho costruito entrambe queste forme di livella, ed è risultata la precisione suddetta, come era prevedibile. Per impedire i movimenti causati dalle correnti d'aria, il bicchiere e il tubo ad U erano collocati entro apposita scatola munita alle estremità opposte di due aperture, che potevo chiudere con vetri, per l'osservazione; dopo assicuratomi che l'apparecchio era in ordine collocavo sulla scatola il suo coperchio, ed impedivo l'azione delle correnti d'aria. Volendo verificare l'esattezza della livella invertivo i traguardi se questi erano entrambi a fessura e filo teso orizzontali; però siccome nella livella ad U usavo come traguardi un forellino in una lamina d'alluminio, e una punta d'ago, non potevo invertirli e verificavo l'esattezza scambiando il punto osservato e quello da cui osservavo. Qualora si verifichi una differenza non grande, il modo più semplice per correggerla è di aumentare un poco il peso del traguardo più alto, o diminuire il peso dell'altro.

« Ho cercato anche di far portare ai galleggianti un cannocchiale con reticolo, usando come liquido il mercurio. In un pezzo di tavola di $20 \times 8 \times 3$ cm. ho praticato due cavità cilindriche di 6 cm. di diametro, 2,5 di profondità, cogli assi distanti 10 cm. e comunicanti mediante un tubo di vetro nascosto in una scanalatura del legno. In queste ho versato circa 100 cm.^{3} di mercurio e vi ho collocato due dei galleggianti già descritti che avevano il disco superiore di 5 cm. di diametro, ed il volume immerso di circa 8 cm.^{3}, laonde assieme potevano sopportare un peso totale di circa 200 grammi.

« Ciascun galleggiante sopportava un rettangolo di filo di ferro di 5 mm. perpendicolare alla lunghezza della tavola che veniva circondata da essi rettangoli, e nel mezzo del lato inferiore di questi appendevo il cannocchiale in modo che il suo centro di gravità fosse ad ugual distanza dai due punti di sospensione. Allorchè spostavo l'oculare, il centro di gravità si spostava e dovevo spostare un corsoio per ristabilire le condizioni primitive, ciò che potrebbe esser fatto automaticamente. Lo strumento è finora allo stato di tentativo. Maggiori particolari seguiranno se esso riuscirà di utilità pratica ».

Fisica. — *Sulle scariche elettriche nel rame e nel ferro.* Nota di P. CARDANI, presentata dal Socio BLASERNA.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Chimica organica. — *Intorno ad una nuova asparagina* [1]. Nota del dott. G. SANI, presentata dal Socio G. KÖRNER.

« In questi ultimi anni sono stati oggetto di studio non pochi derivati dell'asparagina e dell'acido aspartico, contenenti in luogo del residuo del-

[1] Lavoro eseguito nel Laboratorio del prof. Koerner.

l'ammoniaca o un residuo di un' ammina della serie grassa o uno dell'anilina e ottenuti, sia per l'azione di un'ammina della serie grassa sugli eteri degli acidi non saturi, sia facendo reagire anilina ecc. sull'anidride maleica o su sostanze analoghe.

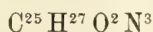
« Nulla si conosce invece intorno ai composti contenenti residui delle vere ammine aromatiche come benzilammina, tolilammina, ed è nell'intenzione di colmare questa lacuna che ho fatto agire la benzilammina sul fumarato dietilico.

« I risultati che seguono, sono oggetto della Nota che ho l'onore di presentare a codesta R. Accademia.

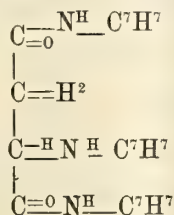
« Scaldando in tubo chiuso 12 grammi di fumarato dietilico con 18 grammi di benzilammina in presenza di 40 grammi di alcool assoluto per 48 ore a 130°-135° si ottiene, come prodotto principale, una sostanza cristallizzata in mammelloni, imbevuta di un liquido sciropposo leggermente colorato in giallo.

« Questo prodotto solido, raccolto su filtro e separato, per quanto possibile, dalle acque madri mediante aspirazione e lavatura con acqua e quindi con etere, tentai di purificarlo cristallizzandolo più volte da alcool bollente; ma non riuscendo per questa via ad avere una sostanza unica, a punto di fusione costante, mi fu necessario ricorrere alla cristallizzazione da etere bollente in cui è pochissimo solubile: ebbi così un prodotto sotto forma di fiocchi leggerissimi, bianchi, opachi che fondono a 149°-150° e che all'analisi diedero i risultati seguenti:

gr. 0,1666 di sost. diedero gr. 0,459 di CO^2 e gr. 0,1013 di H^2O.
gr. 0,222 di sost. fornirono cmc. 21 di N a 23° e sotto 750 mm. di pressione, corrispondente a gr. 0,02335 di N.

« Questi dati corrispondono alla composizione centesimale C = 75,08 — H = 6,75 — N = 10,51: che conduce alla formula:

$$C^{25}H^{27}O^2N^3$$

calcolato per $C^{25}H^{27}O^2N^3$	trovato
C = 74,81	75,08
H = 6,73	6,75
N = 10,47	10,51

« La costituzione della sostanza sopra descritta è quindi:

che non è altro che l'ammide benzilata completa dell'acido benzilammino succinico.

« Questa costituzione trova la sua conferma nei prodotti di trasformazione della sostanza con barite.

« Infatti, riscaldata a lungo con soluzione di idrato di bario, fornisce a fianco di benzilammina libera, il sale di bario di un nuovo acido organico. Presi 20 grammi della sostanza prima e sciolti li in alcool al 60 %, riscaldai a lungo con eccesso di barite in pallone anesso a refrigerante a ricadere: a saponificazione completa, dopo eliminato l'alcool, esaurii la miscela con etere che discioglie la benzilammina formatasi. Il residuo lo purificai facendolo cristallizzare ripetutamente da alcool bollente; ottenni così aghi brillantissimi raggruppati a stelle. La sostanza si dimostra essere un sale di bario che all'analisi diede i seguenti risultati:

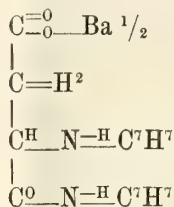
gr. 0,2052 di sostanza diedero cmc. 12,8 di N a 755,8 mm. di pressione e 12° di temp.

gr. 0,254 di sost. diedero gr. 0,078 di SO^4Ba pari a gr. 0,046 di Ba.

« Questi dati corrispondono alla composizione centesimale Ba = 18,11 — N = 7,35 che conduce alla formela $C^{18}H^{20}O^2N^2Ba\frac{1}{2}$.

calcolato per $C^{18}H^{20}O^2N^2Ba^1/_2$	trovato
Ba = 18,0	18,11
N = 7,40	7,35

« Come si vede, uno solo dei gruppi di benzilammina venne spostato dalla barite e la formola di costituzione di questa sostanza è:

$$\begin{array}{l} C{=O \atop -O}\!-\!Ba\,^1/_2 \\ | \\ C{=}H^2 \\ | \\ C\underline{H}\!-\!N{=}\underline{H}\,C^7H^7 \\ | \\ C\underline{O}\!-\!N{=}\underline{H}\,C^7H^7 \end{array}$$

cioè quella del sale di bario di una asparagina, contenente in luogo dei due residui ordinari (NH^2), due residui di benzilammina.

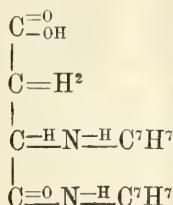
« Questo fatto ottenne dimostrazione eliminando, colla quantità calcolata di acido solforico, il bario dal composto, chè ne risultò una sostanza che cristallizza in pagliuzze d'aspetto setaceo raggruppate in ciuffetti, poco solubili in acqua e in alcool a freddo, discretamente a caldo, che fondono a 204°-205° e che all'analisi danno il seguente risultato:

1ª sost. presa gr. 0,2422 diede gr. 0,6256 di CO^2 e gr. 0,152 di H^2O.
2ª sost. presa gr. 0,1585 » gr. 0,413 di CO^2 e gr. 0,101 di H^2O.
3ª sost. presa gr. 0,2136 » cmc. 18,4 di N a 20° e sotto 7467 mm.
4ª sost. presa gr. 0,129 » cmc. 9,6 di N a 15° e sotto 748 mm.

« Questi dati corrispondono alla composizione centesimale (1ª C = 70,16 — H = 6,9) (2ª C = 70,08 — H = 6,9) (3ª N = 9,06) (4ª N = 9,29). e conducono alla formula $C^{18}H^{20}N^2O^3$.

calcolato per $C^{18}H^{20}N^2O^3$	trovato			
	1ª	2ª	3ª	4ª
C — 69,67	70.16	70,08	»	»
H — 5,80	6, 9	6, 9	»	»
N — 9,03	»	»	9,06	9,29

» A questo composto, per le ragioni che ho detto più sopra, si deve attribuire la formula di costituzione

$$\begin{array}{l} C{=O \atop -OH} \\ | \\ C{=}H^2 \\ | \\ C{=H}N{=H}C^7H^7 \\ | \\ C{=O}N{=H}C^7H^7 \end{array}$$

che è quella di una nuova asparagina, ossia la dibenzilasparagina.

« Un fatto assai interessante è di vedere come la presenza dei residui della benzilammina aumenti in grado così elevato la stabilità della molecola. Nel mentre l'asparagina ordinaria, come è noto, si saponifica appena riscaldata con un alcali o con una terra alcalina, il sopradescritto derivato benzilato sopporta ebollizione prolungata per più giorni con barite in soluzione concentrata, senza perdere il secondo residuo di benzilammina contenuto sotto forma ammidica.

« In altra mia Nota tornerò ad occuparmi di questo argomento e spero di poter ottenere l'acido benzilaspartico dai prodotti che, a fianco del descritto, si formano nell'azione della benzilammina sul fumarato dietilico e che sto attualmente studiando ».

Chimica. — *Sull' impiego della nitrobenzina nelle ricerche crioscopiche.* Nota di G. Ampola e E. Carlinfanti, presentata dal Socio Paternò.

Chimica. — *Sul lapaconone. Nuova sostanza estratta dal legno di lapacho.* Nota di G. Crosa e C. Manuelli, presentata dal Socio Paternò.

Chimica. — *Sull'azione dell' acido nitroso sopra la canforossima.* Nota di A. Angeli, presentata dal Socio Ciamician.

Chimica. — *Sopra alcune soluzioni solide, formate da sostanze non isomorfe.* Nota di F. Garelli, presentata dal Socio Ciamician.

Mineralogia. — *Apatite dell' Elba.* Nota di E. Artini, presentata dal Socio Struever.

Le precedenti Note saranno pubblicate nei prossimi fascicoli.

MEMORIE
DA SOTTOPORSI AL GIUDIZIO DI COMMISSIONI

N. Nicoli. *Sull' efflusso dei fluidi e specialmente dei liquidi sopra-riscaldati sotto forti pressioni* (1). Presentata dal Segretario.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente Brioschi ricorda brevemente le perdite fatte dalla Classe durante le ferie accademiche, nelle persone dei Socî stranieri Huxley e Pasteur, della cui morte fu dato annuncio nei Rendiconti. Aggiunge esser giunta notizia anche della morte del Corrispondente prof. Annibale Corrado, avvenuta il 9 novembre 1895; faceva parte il defunto dell' Accademia, sino dal 9 giugno 1872.

Il Segretario Blaserna comunica che inviarono lettere di ringraziamento all' Accademia, per la loro recente nomina: i Socî nazionali Luciani e Tizzoni; i Corrispondenti Cesàro, De Stefani e Riccò; i Socî stranieri Kölliker, Newcomb, Jordan, Salmon e Wild.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario Blaserna presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando quelle inviate dai Socî Gibelli, Schiaparelli, Pincherle, Bassani, Jannsen, Le Jolis, Prestwich e Klein. Presenta inoltre due fascicoli, 8° e 9°, inviati dal Principe Alberto di Monaco, contenenti i risultati scientifici delle campagne compiute a bordo del yacht " Hirondelle ".

(1) Memoria già ritirata dall' autore, ed ora presentata di nuovo.

CORRISPONDENZA

Ringraziano per le pubblicazioni ricevute:

La R. Accademia Danese delle scienze, di Copenaghen; la Reale Accademia delle scienze di Lisbona; la Società delle scienze naturali di Emden; l'Istituto Smithsoniano di Washington; le Università di Oxford e di Leida; il Museo Nazionale di Buenos Aires.

Annunciano l'invio delle proprie pubblicazioni:

Il Corpo Reale delle miniere, di Roma; l'Accademia delle scienze, iscrizioni e belle lettere di Tolosa; la Società di scienze naturali di Osnabrück; la Società geologica di Calcutta; l'Istituto Teyler di Harlem; il R. Osservatorio di Greenwich; le Università di Basilea, di Giessen, di Erlangen; la Scuola politecnica di Karlsruhe.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

del 17 novembre 1895.

Boccardo E. C. e Baggi V. — Trattato elementare completo di geometria pratica. Torino, 1895. 8°.

Geological Survey of Canada. Maps of Auriferous creeks of the Cariboo ecc. 3 vol. Ottawa, 1895.

Gibelli G. e Ferrero F. — Ricerche di anatomia e morfologia intorno allo sviluppo del fiore e del frutto della trapa natans. Genova, 1895. 8°.

Gosio B. — Sulla sterilizzazione di miscele liquide incompatibili, ad elevata temperatura (Ministero dell'Interno). Roma, 1895. 4°.

Fritzsche H. — Ueber den Zusammenhang zwischen der erdmagnetischen Horizontalintensität und der Inclination. S. Petersburg, 1895. 8°.

Janssen J. — Sur une ascension au sommet du Mont Blanc et les travaux executés pendant l'été de 1895 dans le massif de cette montagne. Paris, 1895. 4°.

Lorenz. P. — Die Ergebnisse der sanitarischen Untersuchungen der Recruten des Kantons Graubundens. 1875-79. Bern, 1895. 4°.

Luini B. — Del moto dell'acqua nelle svolte dei fiumi. Milano, 1895. 8°.

Lyon T. L. — The Conservation of Soil Moisture by Means of Subsoil Plowing. Lincoln, 1895. 8°.

Id. — The Fall preparation of the Land for Sugar Beets. Lincoln, 1895. 8°.

Martini T. — Intorno alle correnti generate dall'immersione del platino e della spugna di platino in una soluzione acidulata. Venezia, 1895. 8°.

Meli R. — Notizie sopra alcuni fossili recentemente ritrovati nella provincia di Roma. Roma, 1895. 8°.

Id. Sopra alcune rare specie di molluschi fossili estratti dal Giacimento classico del Monte Mario presso Roma. Roma, 1895. 8°.

Monti. P. — Regola generale per la soluzione grafica della trisezione dell'angolo. Milano, 1895. 4°.

Ordoñez A. y. E. — Expedición cientifica al Popocatepetel. Mexico, 1895. 8°.

Passerini N. — Esperienze di concimazione del tabacco istituite a Bettole in Valdichiana nel 1894. Firenze, 1895. 8°.

Résultats des campagnes scientifiques accomplies sur son Yacht par Albert I prince Souverain de Monaco, fasc. VIII et IX. Monaco, 1895. 4°.

Schlemüller W. — Die Fortpflanzungs geschwindigkeit des Schalles in einem theoretischen Gase. Prag, s. a. 8°.

Vincenti G. — Fonografia filologica. Torino, 1895. 8°.

Walter B. — Die Oberflächen-oder Schiller-Farben. Braunschweig, 1895. 8°.

Whiteaves J. F. — Paleozoic fossils, vol. III, p. 2^d^. Ottawa, 1895. 8°

P. B

RENDICONTI
DELLE SEDUTE
DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 24 novembre 1895.

A. Messedaglia Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Fisica terrestre. — *Sulla diversa intensità di movimento nell'area scossa dal terremoto romano del 1° Novembre 1895.* Nota del Socio P. Tacchini.

« Di questo terremoto si ebbero notizie da circa un centinaio di punti, e si potè anzitutto stabilire la linea di demarcazione fra la regione in cui il terremoto fu inteso dalle persone, e quelle al di là in cui il fenomeno fu avvertito solo dagli istrumenti: detta linea del mare passa per Corneto-Tarquinia, Viterbo, Terni, Spoleto, Rieti, Pescarocchiano, Avezzano, Civitella Roveto, Vico del Lazio, Carpineto e per Sermoneta ritorna al mare. La maggiore distanza dunque da Roma arriva a 100 chilometri, e ciò soltanto al nord, corrispondendo l'area a 11600 chilometri quadrati circa. Nell'area racchiusa dalla linea anzidetta abbiamo le relazioni di 72 stazioni, per modo che si è potuto stabilire le diverse zone di differente intensità del terremoto.

« Il carattere prevalentemente ondulatorio del terremoto a Roma, e la direzione del movimento poco diversa dal meridiano, e le notizie della minore intensità del fenomeno nei Castelli Romani, ci fece sin dal principio ritenere che l'epicentro dovesse trovarsi verso mare, od entro il mare stesso. Infatti ben presto il nostro corrispondente di Fiumicino ci avvisava dei danni verificatisi nel faro, e l'assistente sig. Baratta inviato colà accertò i fatti annunziati, cioè le lesioni nella lanterna per forte movimento oscillatorio, e, il distacco di un pezzo di lente del faro, oltrechè seppe del movimento delle acque del mare e della fuga dei pesci. Inviai pure il Baratta ad esaminare le case di Malpasso, Tor di Cenci e Tor di Decima, ove gli effetti sono paragonabili a quelli di Ostia e Roma; e dopo poi il sig. Cancani ci diede notizia dei gravi danni avvenuti nella vecchia Tor Pagnotta poco distante dal Malpasso, torre isolata e molto lesionata da gran tempo

e per il terremoto ultimo in gran parte diroccata. In questo modo possiamo intanto stabilire che l'area della massima intensità racchiude Fiumicino, Ostia, Roma, Tor Pagnotta e il gruppo di case del Malpasso, Tor di Cenci e Tor di Decima, per una superficie di 450 chilometri quadrati circa. Dei rimanenti 67 posti se ne sono formati tre differenti gruppi relativi a terremoto *forte*, *mediocre* e *leggero*, e per maggiore garanzia, questi gruppi sono stati determinati due volte prima dal Baratta e poi da me, arrivando agli stessi risultati; dopo di che si sono tracciate le curve delle aree corrispondenti a questa diversa intensità, come è indicato nell'unita cartina.

« La linea che determina la zona del terremoto forte dal mare va sopra a Cerveteri un po' sotto a Formello, Mentana, Tivoli, Capranica, Val Montone, racchiude i Colli Laziali, e quindi per Genzano e Civita Lavinia va a mare.

« La linea che delimita la zona ove il terremoto fu mediocre, da Civitavecchia per Tolfa, Trevignano, Nepi, Magliano Sabino, Stroncone, Rocca-Sinibalda, San Vito Romano, Segni va al mare presso Anzio e Nettuno.

« L'area dove il movimento fu leggero, arriva al limite dell'area scossa e che fu superiormente indicata.

« Gli istrumenti soli avvertirono la scossa ad Ischia, a Monte Giorgio

(Ascoli Piceno) Siena e Fucecchio (Firenze) cioè ad una distanza di 200 chilometri. Il tempo esatto però lo diede solo Siena a

$4^h\ 38^m\ 58''$.

A Roma il tempo dato dal sismografo a registrazione continua con pendolo di $1^m\ 50$ e massa di K. 10 fu di

$4^h\ 37^m\ 31''$

e quello di Rocca di Papa

$4^h\ 37^m\ 56''$.

« Le direzioni diverse del moto indicato nelle relazioni si trovano di accordo colla posizione dell'area epicentrale da noi indicata; e considerando che anche in quell'area di maggiore scuotimento non prevalse il moto sussultorio, così mi sono confermato nella mia opinione, che l'epicentro debba trovarsi a mare poco distante dalla spiaggia sotto Ostia. A questo proposito dirò, che il dott. Cancani considerando, che dagli attuali registratori non si può ricavare l'angolo di convergenza, ha ideato un nuovo metodo per determinare l'ipocentro, qualora si conosca la posizione dell'epicentro e si abbia da un sismografo registratore un diagramma ben netto; il suo metodo consiste nel riprodurre artificialmente un diagramma eguale a quello prodotto dal sismometro sullo stesso registratore; egli ha applicato questo metodo al diagramma di Rocca di Papa pel terremoto del 1° Novembre e così potè avere, a quanto mi ha riferito, l'angolo di emergenza con abbastanza precisione, e ritenendo egli l'epicentro entro l'area di maggiore intensità da noi indicata, trovò che la profondità del focolare sismico dovrebbe essere poco diversa da 15 chilometri ».

Chimica. — *Il para-bromotoluene quale solvente nelle ricerche crioscopiche.* Nota del Socio E. Paternò.

« Lo sviluppo che hanno preso gli studî crioscopici e le ipotesi e le varie opinioni manifestate per rendersi conto dei casi di anomalia, hanno reso necessario lo studio del comportamento delle sostanze di differente funzione chimica nel maggior numero possibile di solventi. È questo, secondo me, il miglior modo per determinare fino a qual punto influisca nel comportamento crioscopico la relazione fra la costituzione chimica del solvente e delle sostanze disciolte.

« Da questo punto di vista sono già stati esaminati parecchi solventi, e mi basti citare il mio lavoro sulla benzina, quello sul p. xilene pubblicato da me e Montemartini; e l'ultimo di Ampola e Manuelli sul bromoformio. Altri sono in corso di studio.

« In questa Nota mi occuperò del p. bromotoluene.

« Del p. bromotoluene è stato determinato il colore latente di fusione da Patterson e Widman, e per un prodotto fusibile a 16°,53 esso fu trovato eguale

a 20,15. Onde con la nota formola di van' t Hoff si calcola che la costante dell' abbassamento molecole deve essere 82,20.

« Il p. bromotoluene da me adoperato fu acquistato dalla fabbrica di Kahlbaum di Berlino, e dopo alcuni saggi mi sono convinto ch' era purissimo, e non era necessaria ulteriore purificazione. Il suo punto di congelamento fu trovato a 26°,88.

« I risultati ottenuti sono i seguenti:

I. Sostanze varie.

1. *Benzina.*

N. d'ord.	concentr.	abbas. termom.	coeffic. abbassam.	abbassam. molecolare.
1	0,782	0,83	1,0614	82,79
2	1,438	1,55	1,078	84,07
3	2,875	2,95	1,026	80,36
4	5,620	5,02	0,893	69,67
5	7,383	7,19	0,973	75,96
6	12,351	11,39	0,922	72,914
7	16,500	14,42	0,874	68,167
8	22,421	18,39	0,820	63,976
9	28,450	21,96	0,772	60,206
10	35,655	26,02	0,730	56,920
11	42,925	29,32	0,683	53,278
12	49,526	31,84	0,643	50,14

2. *Toluene.*

N. d'ord.	concentr.	abbass. termom.	coeffic. abbassam.	abbassam. molecolare.
13	0,375	0,38	1,013	93,22
14	0,883	0,85	0,962	88,53
15	2,097	1,92	0,915	84,23
16	3,665	3,26	0,889	81,83
17	5,662	5,05	0,891	82,05
18	7,316	6,22	0,850	78,217
19	9,549	7,90	0,823	75,75
20	12,712	10,17	0,800	73,60
21	17,379	13,37	0,769	70,77
22	21,938	16,07	0,732	67,39
23	26,345	18,83	0,714	65,757
24	32,587	21,99	0,674	62,08

3. *Bromuro d' etilene.*

N. d'ord.	concentr.	abbass. termom.	coeffic. abbassam.	abbassam. molecolare.
25	0,792	0,38	0,478	89,99
26	2,842	1,30	0,457	85,99
27	6,020	2,63	0,437	82,13
28	17,934	7,23	0.403	75,79
29	24,226	9,45	0,390	73,33
30	31,483	11,81	0,375	70,52
31	39,223	14,07	0,350	65,90
32	53,701	17,85	0,332	62,49

4. *Etilsuccinimide.*

N. d'ord.	concentr.	abbass. termom.	coeffic. abbassam.	abbassam. molecolare.
33	0,980	0,63	0,642	81,64
34	3,113	1,86	0,597	75,88
35	5,133	2,84	0,553	70,26
36	7,645	3,98	0,520	60,05
37	10,862	5,18	0,476	60,56
38	13,952	6,19	0,443	56,34
39	16,967	7,04	0,414	52,698
40	23,062	8,84	0,383	48,68
41	29,202	10,36	0,354	45,05
42	39,054	12,52	0,320	40,71
43	45,710	13,67	0,299	37,98

5. *Ossalato d' etile.*

N. d'ord.	concentr.	abbass. termom.	coeffic. abbassam.	abbassam. molecolare.
44	0,3885	0,24	0,617	90,19
45	1,4201	0,84	0,591	86,36
46	2,9170	1,67	0,572	83,58
47	5,1449	2,78	0,540	78,89
48	7,3301	3,88	0,529	77,28
49	9,8175	4,94	0,503	73,46
50	12,9839	6,24	0,480	70,16
51	15,2547	7,12	0,466	68,14
52	17,6274	8,06	0,457	66,75

6. *Veratrol.*

N. d'ord.	concentr.	abbass. termom.	coeffic. abbassam.	abbassam. molecolare.
53	0,556	0,35	0,629	86,87
54	1,751	1,07	0,611	84,33
55	2,939	1,79	0,609	84,05
56	4,694	2,79	0,594	82,02
57	6,680	3,83	0,573	79,12
58	9,340	5,13	0,549	75,79
59	11,673	6,49	0,556	76,72
60	15,729	8,39	0,533	73,61
61	20,832	10,49	0,503	69,48
62	26,428	12,67	0,479	66,16
63	32,765	14,99	0,457	63,13
64	38,886	16,89	0,434	59,94
65	45,905	19,29	0,420	57,99
66	51,203	20,66	0,403	55,68

7. *Tiofene.*

N. d'ord.	concentr.	abbass. termom.	coeffic. abbassam.	abbassam. molecolare.
67	0,4979	0,52	1,044	87,73
68	1,4106	1,44	1,020	85,74
69	2,9571	2,92	0,987	82,94
70	5,0059	4,74	0,946	79,33
71	7,8703	7,38	0,937	78,76
72	11,0742	9,82	0,886	74,48
73	16,9738	13,95	0,821	69,03
74	20,2919	16,20	0,818	68,78
75	22,5996	17,60	0,778	65,41

II. Alcaloidi.

8. *Anilina.*

N. d'ord.	concentr.	abbass. termom.	coeffic. abbassam.	abbassam. molecolare.
76	0,338	0,32	0,946	88,05
77	1,041	1,01	0,970	90,23
78	2,534	2,15	0,848	78,90
79	4,926	3,75	0,761	70,79
80	7,750	5,53	0,713	66,36
81	10,589	7,07	0,667	62,09
82	14,182	8,56	0,603	56,13
83	20,120	10,67	0,530	49,319
84	29,422	13,27	0,451	41,94
85	46,011	16,71	0,363	33,77

9. *Piridina.*

N. d'ord.	concentr.	abbass. termom.	coeffic. abbassam.	abbassam. molecolare.
86	0,375	0,35	0,933	73,73
87	1,1927	1,15	0,964	76,17
88	2,2587	2,16	0,956	75,54
89	4,2609	4,05	0,950	75,09
90	7,5133	6,91	0,919	72,65
91	16,4037	13,20	0,804	63,57
92	30,5239	20,85	0,683	54,96

III. Alcooli.

10. *Alcool etilico.*

N. d'ord.	concentr.	abbass. termom.	coeffic. abbassam.	abbassam. molecolare.
93	0,259	0,43	1,660	76,73
94	0,591	0,85	1,438	66,16
95	1,081	1,31	1,212	55,74
96	1,895	1,77	0,934	42,98
97	3,612	2,40	0,664	30,56
98	5,841	3,16	0,541	24,88
99	10,915	3,88	0,355	16,35
100	19,133	5,86	0,366	14,08
101	40,574	6,79	0,167	76,98

IV. Acidi.

11. *Acido acetico.*

N. d'ord.	concentr.	abbass. termom.	coeffic. abbassam.	abbassam. molecolare.
102	0,3395	0,34	1,001	60,09
103	1,1250	0,88	0,782	46,933
104	2,2485	1,61	0,716	42,96
105	3,8188	2,60	0,680	40,85
106	5,8217	3,64	0,625	37,51
107	19,0306	8,04	0,422	25,35
108	34,7406	11,42	0,328	19,72

V. Fenoli.

12. *Fenol.*

N. d'ord.	concentr.	abbass. termom.	coeffic. abbassam.	abbassam. molecolare.
109	2,179	1,52	0,697	65,57
110	3,903	2,40	0,615	57,80
111	5,814	3,11	0,534	50,17
112	7,900	3,70	0,468	44,02
113	9,391	4,18	0.445	41,84
114	11,612	4,75	0,409	38,45
115	13,895	5,31	0,382	35,92
116	16,515	5,85	0,354	33,297
117	20,094	6,51	0,324	30,45
118	22,578	7,03	0,311	29,267
119	28,012	7,81	0,278	26,21
120	30,726	8,31	0,270	25,42
121	35,337	9,05	0,256	24,07
122	40,008	9,64	0,241	22,65
123	42,877	10,07	0,235	22,07

13. *Paracresol.*

N. d'ord.	concentr.	abbass. termom.	coeffic. abbassam.	abbassam. molecolare.
124	0,411	0,30	0,729	78,83
125	1,029	0,68	0,660	71,37
126	1,794	1,05	0,585	63,21
127	2,721	1,49	0,547	59,12
128	3,979	1,95	0,490	52,927
129	5,767	2,54	0,440	47,567
130	9,025	3,42	0,378	40,920
131	12,986	4,34	0,334	36,09
132	17,744	5,28	0,297	32,137
133	23,269	6,32	0,271	29,33
134	29,118	7,27	0,249	26,96
135	38,959	8,97	0,230	24,86

14. *Timol.*

N. d'ord.	concentr.	abbass. termom.	coeffic. abbassam.	abbassam. molecolare.
136	0,369	0,20	0,542	92,68
137	3,402	1,76	0,517	88,46
138	5,128	2,55	0,497	85,03
139	7,527	3,51	0,466	79,74
140	9,933	4,38	0,441	75,399
141	13,057	5,48	0,419	71,768

« Da una semplice ispezione delle tavole che precedono si vede subito che il bromotoluene si comporta in modo analogo agli idrocarburi ed ai loro prodotti di sostituzione alogenici o nitrici (benzina, p. xilene, bromuro di etilene, bromoformio, nitrobenzina). Si ottengono cioè risultati normali con le sostanze neutre in generale e con gli alcaloidi, circa metà dei normali per gli acidi; in quanto agli alcooli ed i fenoli si hanno risultati normali o prossimi ai normali in soluzioni molto diluite, i quali col crescere della concentrazione si allontanano sempre più ed in modo rapidissimo per gli alcooli, meno rapido pei fenoli.

« In quanto al numero da scegliere per costante dell' abbassamento molecolare, risulta quanto segue dalle esperienze indicate.

Per la benzina	le esp. nº	1 a 5	danno	in	media	79,22
» toluene	» »	14 a 17	»	»	»	84,16
Per il bromuro di etilene	» »	25 a 28	»	»	»	83,47
Per l'ossalato di etile	» »	46 a 50	»	»	»	79,91
Per il veratrol	» »	54 a 59	»	»	»	82,03
» tiofene	» »	68 a 71	»	»	»	83,93
Per l' anilina	» »	77 a 80	»	»	»	81,99

Media generale 82,10.

« Numero che può dirsi coincidente con quello calcolato con la formola di van't Hoff.

« Il bromotoluene per le sue estese proprietà solventi, per la facilità di averlo puro e conservarlo lungamente inalterato e più di tutto perchè non presenta fenomeni di surfusione, è uno dei solventi più raccomandabili per le determinazioni crioscopiche ».

Matematica. — *Sulle soluzioni coniugate nelle equazioni lineari differenziali e alle differenze.* Nota del Corrispondente S. Pincherle.

« Nello studio delle equazioni differenziali lineari si sono presentati sistemi di r integrali tali che se φ denota uno di essi, gli altri sono $x\varphi$, $x^2\varphi$, ... $x^{r-1}\varphi$. Questi integrali, chiamati con espressione forse non molto fe-

lice « soluzioni coniugate » dell'equazione, sono stati considerati dal Brassine [1] e dal Floquet [2]: essi sono per un'equazione differenziale lineare l'analogo di ciò che è una radice dell'ordine r di multiplicità per un'equazione algebrica, e la condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di un tale sistema di soluzioni è stato dato dal Brassine nei seguenti termini. Sia

$$F = \frac{d^n}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{d}{dx} + a_n(x)$$

la forma differenziale lineare che, uguagliata a zero, dà l'equazione che si considera. Si moltiplichi ogni termine della forma per l'indice di derivazione e si diminuisca quest'indice di un'unità: si ottiene la forma, già considerata dal D'Alembert:

$$F' = n\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + (n-1)\,a_1(x)\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} + \cdots + a_{n-1}(x),$$

chiamata dal Brassine *prima coniugata* della forma data: applicando da capo la medesima regola, si ottengono le forme F'', F''', ... seconda, terza, ... coniugate della data. Or bene, condizione necessaria e sufficiente affinchè la $F = 0$ abbia il sistema di soluzioni coniugate $\varphi, x\varphi, \ldots x^{r-1}\varphi$, è che φ ha soluzione di $F = 0$, $F' = 0$, $F'' = 0$, ... fino ad $F^{(r-1)} = 0$.

« Una questione analoga è stata studiata per le equazioni lineari alle differenze finite, in una Nota interessante recentissimamente pubblicata dal prof. Torelli [3]. Egli ha chiamate « soluzioni coniugate » di una equazione lineare alle differenze r soluzioni tali che denotando con $\varphi(x)$ una di esse, le altre siano date da $x\varphi, x(x+1)\varphi, \ldots x(x+1)\ldots(x+r-1)\varphi$; ha designato col nome di « forma prima derivata » della forma lineare alle differenze

$$F = f(x+n) + a_1(x)f(x+n-1) + \cdots + a_n(x)f(x)$$

la F' ottenuta moltiplicando ogni termine per l'indice aggiunto ad x e diminuendo questo indice di un'unità, talchè

$$F' = nf(x+n-1) + (n-1)\,a_1(x)f(x+n-2) + \cdots + a_{n-1}(x)f(x);$$

così, applicando reiteratamente la medesima regola, si hanno le forme F'', F''', ... o seconda, terza, ... derivata della forma data. Egli ha trovato che la condizione necessaria e sufficiente affinchè la F abbia il sistema di soluzioni coniugate $\varphi, x\varphi, \ldots x(x+1)\ldots(x+r-1)\varphi$ è che essendo φ soluzione di $F = 0$, $\varphi(x+1)$ lo sia di $F' = 0$, $\varphi(x+2)$ di $F'' = 0$, ... fino a $\varphi(x+r-1)$ che deve soddisfare $F^{(r-1)} = 0$.

[1] Nota III al *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique* di Sturm, 3ème édit. Paris, 1868.

[2] Annales de l'École Normale supérieure, S. II, T. VIII, 1879.

[3] Rendiconti della R. Accademia di Napoli, 13 luglio 1895.

« Ora in queste poche righe mi propongo di mostrare con quanta semplicità le proposizioni precedenti si possono ottenere ricorrendo al calcolo generale delle operazioni funzionali distributive, di cui ho recentemente esposto i primi principî in una Nota pubblicata in questi medesimi Rendiconti [1]. Sia, a tale uopo, A una operazione distributiva qualunque ed $A(\varphi)$ il risultato che si ottiene applicandola alla funzione φ, e si consideri l'equazione $A=0$. Diremo che un sistema di r soluzioni di questa equazione forma un sistema di « soluzioni coniugate », quando le dette soluzioni sono proporzionali ad r funzioni razionali intere di grado non superiore ad $r-1$ e delle quali il determinante dei coefficienti sia differente da zero. Il nome di « soluzioni coniugate » si dà solo per uniformarsi alla denominazione usata nei casi precedentemente ricordati. Siano dunque queste soluzioni

$$\varphi_i = (a_{i1} + a_{i2}x + a_{i3}x^2 + \cdots + a_{ir}x^{r-1})\,\psi \qquad (1)$$
$$(i = 1, 2, 3, \ldots r),$$

in cui il determinante

$$D = \Sigma \pm a_{11}\, a_{22} \ldots a_{rr}$$

è differente da zero. Moltiplicando le $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_r$ rispettivamente per i quozienti degli elementi reciproci di $a_{1h}, a_{2h}, \ldots a_{rh}$ divisi per D, si avrà, detti $\alpha_{1h}, \alpha_{2h}, \ldots \alpha_{rh}$ questi quozienti:

$$\alpha_{1h}\,\varphi_1 + \alpha_{2h}\,\varphi_2 + \cdots \alpha_{rh}\,\varphi_r = x^{h-1}\,\psi$$
$$(h = 1,\ 2, \ldots r),$$

che saranno altrettante soluzioni della medesima equazione $A=0$, come è evidente; onde se esiste un sistema di r soluzioni coniugate per l'equazione $A=0$, esiste anche un sistema di r soluzioni della forma $\psi, x\psi, x^2\psi, \ldots x^{r-1}\psi$, come pure della forma $\psi, x\psi, x(x+1)\psi, \ldots$, cosicchè la definizione nostra racchiude quelle dei due autori ripetutamente citati, nei casi da essi rispettivamente considerati.

« È facile ora di dare una condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di un tale sistema di soluzioni. Nel lavoro citato [2] ho chiamata *derivata funzionale* di un'operazione distributiva $A(\varphi)$ la nuova operazione

$$A'(\varphi) = A(x\varphi) - xA(\varphi),$$

ed in modo analogo si sono definite le derivate seconda, terza, ... A'', A''', ... Esse danno luogo alle identità

$$(2)\quad \begin{cases} A(x\varphi) = A'(\varphi) + xA(\varphi) \\ A(x^2\varphi) = A''(\varphi) + 2xA'(\varphi) + x^2A(\varphi) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ A(x^{r-1}\varphi) = A^{(r-1)}(\varphi) + (r-1)\,xA^{(r-2)}(\varphi) + \cdots + x^{r-1}A(\varphi) \end{cases}$$

[1] *Sulle operazioni funzionali distributive.* Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 17 febbraio 1895.

[2] *Sulle operazioni funzionali distributive,* § 7.

Se dunque è $A(\varphi) = 0$, $A'(\varphi) = 0$, ... $A^{(r-1)}(\varphi) = 0$ per una medesima funzione $\varphi = \psi$, sarà anche $A(\psi) = A(x\psi) = \cdots A(x^{r-1}\psi) = 0$, ed esiste un sistema di soluzioni coniugate: reciprocamente se esiste un tale sistema e quindi una funzione ψ tale che sia $A(\psi) = A(x\psi) = \cdots = A(x^{r-1}\psi) = 0$, dalla forma delle (2) si conclude che deve essere $A'(\psi) = A''(\psi) = \cdots A^{(r-1)}(\psi) = 0$. Talchè:

« Condizione necessaria e sufficiente affinchè un'operazione distributiva A « si annulli per un sistema coniugato di r soluzioni, è che esista una fun- « zione che annulli A e le sue $r-1$ prime derivate funzionali ».

« Come casi particolari si deducono immediatamente le proposizioni del Brassine e del Torelli. Si ammetta dapprima che A sia una forma differenziale lineare, e si ricordi (¹) che la derivata funzionale dell'operazione $\frac{d^n}{dx^n}$ o D^n è nD^{n-1}, e si ha senz'altro la proposizione del Brassine. Si supponga poi che A sia una forma lineare alle differenze

$$F = f(x+n) + a_1(x) f(x+n-1) + \cdots a_{n-1}(x) f(x+1) + a_n(x) f(x)$$

o simbolicamente

$$\theta^n + a_1(x)\,\theta^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(x)\,\theta + a_n(x),$$

e si ricordi che la derivata funzionale di θ^h è $h\theta^h$ (²), e si avrà che se la F ammette r soluzioni coniugate (che è indifferente di prendere nella forma $\varphi, x\varphi, x(x+1)\varphi, \ldots$ data dal Torelli) φ annullerà la F e le derivate funzionali

$$F' = n\theta^n + a_1(x)(n-1)\,\theta^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(x)\,\theta,$$
$$F'' = n^2\theta^n + a_1(x)(n-1)^2\,\theta^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(x)\,\theta,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Per dare a questa condizione la forma stessa che vi dà il prof. Torelli, osserviamo che se $F'\big(\varphi(x)\big) = 0$, la forma

$$n\,\theta^{n-1} + a_1(x)(n-1)\,\theta^{n-2} + \cdots + a_{n-1}(x)$$

sarà annullata per $\varphi(x+1)$: ma questa è annullata anche per $x\varphi(x+1)$ per ipotesi, onde sarà nulla per $\varphi(x+1)$ anche la sua derivata funzionale, vale a dire

$$n(n-1)\,\theta^{n-1} + a_1(x)(n-1)(n-2)\,\theta^{n-2} + \cdots + a_{n-2}(x)\,\theta$$

e quindi

$$n(n-1)\,\theta^{n-2} + a_1(x)(n-1)(n-2)\,\theta^{n-3} + \cdots + a_{n-2}(x)$$

(¹) Ibid. § 9 *c*.
(²) Ibid. § 9 *d*.

sarà nulla per $\varphi(x+2)$, ecc.: con ciò si ha precisamente il teorema del prof. Torelli ricordato in principio.

« Sotto la forma generale che abbiamo data al problema, è dunque risoluta la questione dei sistemi coniugati di soluzioni per operazioni distributive di qualunque natura, e quindi in particolare anche per equazioni lineari differenziali od alle differenze ad infiniti termini ».

Matematica. — *Sulla teoria degli iperspazi.* Nota del prof. GREGORIO RICCI, presentata dal Socio CREMONA.

« 1. Si abbia una forma fondamentale ad n variabili

$$\varphi = \Sigma_{rs}\, a_{rs}\, dx_r\, dx_s\,,$$

e $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ siano gli elementi di un sistema semplice covariante, pel quale valga la identità

$$\Sigma_r\, \lambda^{(r)}\, \lambda_r = 1\,. \tag{1}$$

« Le equazioni

$$\lambda^{(r)} = \frac{dx_r}{\sqrt{\varphi}}\,, \tag{2}$$

in cui con $\sqrt{\varphi}$ designerò il valore assoluto di questo radicale, rappresenteranno una congruenza di linee tracciate nella varietà φ [1] e determinate per ogni punto anche quanto alla loro direzione positiva; e reciprocamente ogni congruenza di linee così determinata potrà considerarsi come rappresentata da un sistema di equazioni (2), i cui primi membri $\lambda^{(r)}$ siano funzioni date delle variabili $x_1, x_2, \ldots x_n$ legate fra loro dalla relazione (1). Chiamo il sistema $\lambda^{(r)}$ (rispettivamente λ_r) *sistema coordinato controvariante (covariante)* della congruenza di linee rappresentata dalle equazioni (2).

« Indico con $\lambda_{1/r}, \lambda_{2/r}, \ldots \lambda_{n/r}$ i sistemi coordinati covarianti di n congruenze di linee ortogonali fra di loro due a due o, come dirò, costituenti un sistema ortogonale nella varietà φ. Si avranno le identità

$$\Sigma_r\, \lambda_h^{(r)}\, \lambda_{k/r} = \varepsilon_{hk} \quad (h\,, k = 1\,, 2\,, \ldots n) \tag{3}$$

il simbolo ε_{hk} rappresentando lo 0 o l'unità, secondo che gli indici h e k sono distinti o coincidono. Ad esse equivalgono le

$$\Sigma_h\, \lambda_{h/r}\, \lambda_{h/s} = a_{rs} \tag{3'}$$

(1) Chiamo così brevemente la varietà ad n dimensioni, il cui elemento lineare è espresso da $\sqrt{\varphi}$.

« 2. Dalle (3) per derivazione covariante secondo la forma fondamentale φ si traggono le

(4) $$\Sigma_r \lambda_h^{(r)} \lambda_{k/rs} + \Sigma_r \lambda_k^{(r)} \lambda_{h/rs} = 0 .$$

« Posto

(5) $$\lambda_{h/rs} = \Sigma_{ij} \gamma_{hij} \lambda_{i/r} \lambda_{j/s} ,$$

abbiamo quindi le

(6) $$\gamma_{hkj} + \gamma_{khj} = 0$$

e in particolare le

(6′) $$\gamma_{hhj} = 0 .$$

« Dalle (5) risulta che i coefficienti γ_{hij} sono invarianti e dalle (6) che essi sono in numero $\frac{n^2(n-1)}{2}$ essenzialmente distinti.

« Gli invarianti γ_{hij} sono legati fra loro e coi sistemi coordinati delle n congruenze ortogonali qui considerate, dalle equazioni differenziali

(7) $$\frac{d\gamma_{hik}}{ds_l} - \frac{d\gamma_{hil}}{ds_k} + \Sigma_j \gamma_{hij} (\gamma_{jkl} - \gamma_{jlk}) + \Sigma_j (\gamma_{jhl} \gamma_{jik} - \gamma_{jhk} \gamma_{jil}) =$$
$$= \Sigma_{qrst} \lambda_h^{(q)} \lambda_i^{(r)} \lambda_k^{(s)} \lambda_l^{(t)} a_{qr,st} ,$$

in cui con ds_l si rappresenta l'elemento d'arco delle linee della congruenza, che ha il sistema $\lambda_{l/r}$ come sistema coordinato covariante, o, come dirò brevemente, della congruenza $\lambda_{l/r}$. — Queste equazioni si stabiliscono derivando anche le (5) covariantemente secondo φ e facendo uso delle relazioni note tra le $\lambda_{h/rst}$ e le $\lambda_{h/rts}$. — Nel caso di $n = 2$ le (7) si riducono ad una sola; e precisamente alla formola, che dà in coordinate ortogonali la nota espressione di Liouville per la curvatura delle superficie, di cui $\sqrt{\varphi}$ rappresenta l'elemento lineare.

« 3. Si supponga la varietà φ immersa in una varietà ad $n + m$ dimensioni, i cui punti, almeno in un intorno C di φ, possano determinarsi mediante le coordinate $x_1, x_2, \dots x_n$ di φ e mediante altre m coordinate $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots x_{n+m}$. Il quadrato dell'elemento lineare di C avrà una espressione della forma

$$\psi = \Sigma_{rs}^{n+m}{}_1 \, a_{rs} \, dx_r \, dx_s ,$$

i coefficienti a_{rs} pei punti di φ e per r ed s non maggiori di n, essendo gli stessi, che appariscono nella espressione di φ. Se poi si considera in φ un sistema S ortogonale di congruenze $\lambda_1^{(r)} \lambda_2^{(r)} \dots \lambda_n^{(r)}$ e si fanno le posizioni

$$\mu_h^{(r)} = \lambda_h^{(r)} \qquad (h = 1, 2, \dots n ;\ r = 1, 2, \dots n)$$

$$\mu_h^{(n+r)} = 0 \qquad (h = 1, 2, \dots n ;\ r = 1, 2, \dots m)$$

i sistemi $\mu_h^{(1)}$, $\mu_h^{(2)}$, ... $\mu_h^{(n+m)}$ rappresenteranno n congruenze di linee ortogonali fra di loro due a due in C, e tali di più che pei punti della varietà φ le loro linee coincidono con quelle del sistema S. Se ad esse, come è sempre possibile, si aggiungono altre m congruenze $\mu^{(r)}_{n+1}$ $\mu^{(r)}_{n+2}$ ⋯ $\mu^{(r)}_{n+m}$ ortogonali fra di loro ed alle precedenti si ottiene un sistema di $n+m$ congruenze ortogonali nella varietà C ad $n+m$ dimensioni, e questo sistema è tale che dalle posizioni

$$\mu_{h/rs} = \Sigma_{ij}^{n+m} \gamma'_{hij} \mu_{i/r} \mu_{j/s} ,$$

analoghe alle (5) risultano le identità

$$\gamma'_{hij} = \gamma_{hij} ,$$

tutte le volte che nessuno degli indici h, i, j è maggiore di n. Ne segue che

« Gli invarianti γ_{hij} non cambiano valore anche se in vece della forma φ « si considera come forma fondamentale la espressione ψ del quadrato del- « l'elemento lineare di una varietà ad $n+m$ dimensioni, in cui la varietà φ « si trovi immersa ».

« Poichè una varietà qualunque può sempre riguardarsi come immersa in uno spazio piano, il teorema precedente conduce ad una interpretazione geometrica assai semplice ed importante per gli invarianti γ_{lki}. Sia la varietà φ immersa in uno spazio piano S e, scelto ad arbitrio un punto P di φ, si designi con T_{hkl} il triedro delle tangenti in P alle linee delle congruenze $\lambda_{h/r}$, $\lambda_{k/r}$, $\lambda_{l/r}$; con i uno qualunque degli indici h, k, l. — L'invariante γ_{lki} rappresenta la componente secondo la tangente alla linea $\lambda_{h/r}$, che passa per P, della rotazione subìta dal triedro T_{hkl} per uno spostamento infinitesimo del suo vertice lungo la linea $\lambda_{i/r}$. — In particolare se i coincide con k, si ha che l'invariante γ_{lkk} rappresenta la curvatura della proiezione della linea $\lambda_{k/r}$ sul piano determinato dalle tangenti alla linea stessa ed alla linea $\lambda_{l/r}$ sempre che la direzione positiva di quest'ultima si faccia coincidere con quella della normale positiva alla prima.

« 4. Dirò ora dei risultati ottenuti applicando le teorie precedentemente esposte alla risoluzione di speciali problemi.

1.° Si vogliano stabilire le condizioni necessarie e sufficienti perchè le linee di una congruenza definita nella varietà φ mediante il suo sistema coordinato λ_r risultino ortogonali alle varietà ad $n-1$ dimensioni di un sistema qualunque; analiticamente, perchè gli elementi λ_r siano proporzionali alle derivate di una funzione delle variabili x_1, x_2, ... x_n. Se per uniformità colle notazioni usate nei §§ precedenti si pongono le $\lambda_r = \lambda_{n/r}$ e con $\lambda_{1/r}$, $\lambda_{2/r}$, ... $\lambda_{n-1/r}$ si denotano gli elementi dei sistemi coordinati covarianti di $n-1$

congruenze di linee formanti colla data un sistema ortogonale, le condizioni cercate sono rappresentate dalle equazioni

$$\gamma_{nkh} = \gamma_{nhk}.$$

« Il teorema del § precedente dà poi la interpretazione geometrica di queste condizioni.

2°. Si ricerchino le condizioni necessarie e sufficienti perchè le linee della congruenza considerata sopra siano geodetiche. Perciò lungo le linee di questa si considerino le variabili x_r come funzioni della sola variabile indipendente t e si facciano le posizioni

$$x_r' = \frac{dx_r}{dt} \quad , \quad s' = \frac{ds}{dt} ,$$

rappresentando con s l'arco delle linee λ_r. Le (2) assumeranno la forma

$$x_r' = s' \lambda^{(r)}$$

e, indicando con $a_{rs,t}$ i noti simboli di Christoffel a tre indici, avremo

$$s' \delta s' = \Sigma_{rs} a_{rs} x_r' \delta x_s' + \Sigma_{rst} a_{rs,t} x_r' x_s' \delta x_t ,$$

ovvero

$$\delta s' = \Sigma_r \lambda_r \delta x_r' + s' \Sigma_r \delta x_r \Sigma_{st} a_{rt,s} \lambda^{(s)} \lambda^{(t)} .$$

« Posto

$$s = \int_{t_0}^{t_1} s' \, dt ,$$

avremo quindi anche facilmente le

$$\delta s = - \int_{t_0}^{t_1} ds \, \Sigma_r \delta x_r \Sigma_s \lambda^{(s)} \lambda_{rs} .$$

Dunque le condizioni cercate sono espresse dalle equazioni

$$\Sigma_s \lambda^{(s)} \lambda_{rs} = 0 ,$$

le quali per le (5) assumono la forma

$$\gamma_{inn} = 0 , \quad (i = 1, 2, .. n-1) .$$

« Si supponga ora che le linee della congruenza λ_r non siano geodetiche, si ponga

$$\gamma^2 = \Sigma_i \gamma_{inn}^2 ,$$

assumendo per γ il valore positivo, che soddisfa a questa equazione; e di più

$$\gamma \lambda_r' = \Sigma_i \gamma_{inn} \lambda_{i/r} .$$

È facile riconoscere che le λ_r' sono gli elementi del sistema cordinato covariante di una congruenza di linee ortogonali a quelle della congruenza λ_r. Per un punto qualunque P della varietà φ si consideri il vettore di grandezza γ e la cui direzione coincide con quella della linea λ_r' passante per quel punto; e lo si chiami *curvatura geodetica* della linea λ_r passante per P. Si avrà:

a) Che l'annullarsi identicamente della curvatura geodetica di una congruenza di linee, dà la condizione necessaria e sufficiente perchè queste linee siano geodetiche.

b) Che per una congruenza di linee non geodetiche la curvatura geodetica di una linea in un determinato punto è rappresentata da un vettore normale alla linea in quel punto.

c) Che la proiezione della curvatura geodetica sopra una direzione qualunque r normale alla linea dà la flessione della proiezione di questa sul piano formato dalla linea considerata e dalla direzione r.

« Per precisare il senso di questi due ultimi enunciati conviene riguardare, come è sempre permesso, la varietà φ come immersa in una varietà piana.

3.° *Equazioni fondamentali della Geometria differenziale negli iperspazi.* Ho dimostrato altrove che, data una forma fondamentale φ ad n variabili, perchè questa rappresenti il quadrato dell'elemento lineare di una superficie ad n dimensioni, cioè di una varietà immersa in uno spazio piano ad $n+1$ dimensioni, è necessario e basta che si possa determinare un sistema doppio simmetrico, i cui elementi b_{rs} soddisfacciano alle equazioni algebriche

$$(g) \qquad b_{rt}\, b_{su} - b_{ru}\, b_{ts} = a_{rs,tu}$$

ed alle equazioni a derivate parziali

$$(c) \qquad b_{rst} = b_{rts}\,.$$

Per $n=2$ le formole (g) e (c) dànno rispettivamente il teorema di Gauss e le formole di Codazzi [1]. Per n qualunque si perviene collo stesso metodo a formole, che sono da riguardare come la generalizzazione di quelle, e come fondamentali per la teoria delle superficie negli iperspazî.

« Per ciò nella varietà proposta φ si consideri un sistema di congruenze ortogonali $\lambda_{1/r}, \lambda_{2/r}, \dots \lambda_{n/r}$ e, come è permesso, si determinino $\frac{n(n+1)}{2}$ quantità $\omega_{hk} = \omega_{kh}$ mediante le posizioni

$$(\beta) \qquad b_{rs} = \Sigma_{hk}\, \omega_{hk}\, \lambda_{h/r}\, \lambda_{k/s}\,.$$

[1] Vedasi il capitolo I della mia Memoria *Sulla teoria intrinseca delle superficie ed in ispecie di quelle di 2.° grado.* (Atti del R. Istituto Veneto di scienze lettere ed arti, serie VII, tomo VI).

Le (g) si trasformano senz'altro nelle

$$(g') \qquad \omega_{hk}\,\omega_{ij} - \omega_{hj}\,\omega_{ik} = \Sigma_{rstu}\, a_{rs,tu}\, \lambda_h^{(r)}\, \lambda_k^{(s)}\, \lambda_i^{(t)}\, \lambda_j^{(u)}\,.$$

Derivando poi le (β) covariantemente secondo φ le (c) alla loro volta, tenuto conto delle (5), si trasformano nelle

$$(c') \qquad \frac{d\omega_{hl}}{ds_j} - \frac{d\omega_{hj}}{ds_l} = \Sigma_k \left\{ \omega_{hk}\,(\gamma_{kjl} - \gamma_{klj}) + \omega_{jk}\,\gamma_{khl} - \omega_{lk}\,\gamma_{khj} \right\}.$$

Le (g') e (c') sono dunque rispettivamente le formole di Gauss e di Codazzi generalizzate.

« Ci sono già noti i significati dei coefficienti γ_{ihl} e sarebbe facile riconoscere che le ω_{hh} sono da riguardarsi come *curvature normali*, e per $h < l$ le ω_{hl} cambiate di segno come *torsioni geodetiche*.

« Combinando le (g') colle formole (7) del § 1 si perviene alle

$$(g'') \quad \omega_{hk}\,\omega_{ij} - \omega_{hj}\,\omega_{ik} = \frac{d\gamma_{hki}}{ds_j} - \frac{d\gamma_{hkj}}{ds_i} + \Sigma_l\, \gamma_{hkl}(\gamma_{lij} - \gamma_{lji}) + \Sigma_l(\gamma_{lhj}\,\gamma_{lki} - \gamma_{lhi}\,\gamma_{lkj}).$$

« 5. Dal § precedente segue che se le n congruenze del sistema ortogonale risultano come intersezioni di n sistemi di varietà ad $n-1$ dimensioni ortogonali fra di loro due a due, assieme alle (6) del § 1 si hanno le

$$\gamma_{hkj} = \gamma_{hjk},$$

quando gli indici h, k, j siano tutti distinti fra di loro. Queste poi combinate colle (b) ci dànno per questo caso le $\gamma_{hkj} = 0$.

« Nella ipotesi qui ammessa i risultati esposti si semplificano assai. In particolare le formole (c') e (g'') coincidono con quelle già date dal prof. Cesàro, le quali valgono appunto nel caso qui considerato, come risulta implicitamente dalle considerazioni, da cui egli è partito per istabilirle ».

Fisica. — *Sopra la corrispondenza polare fra coniche inviluppo e coniche luogo stabilita da una quartica piana.* Nota di E. Ciani, presentata dal Corrispondente Bertini.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Fisica. — *Sulle leggi di propagazione della luce nei cristalli magnetici.* Nota di Alfonso Sella, presentata dal Socio Blaserna.

« Nella teoria elettromagnetica della luce si suppone per giungere alle leggi di Fresnel che le costanti di permeabilità magnetica sieno eguali in tutte le direzioni. Questa ipotesi appare giustificata solo sino ad un certo punto, e ad ogni modo spetta alla esperienza il decidere in proposito. Perciò sarebbe interessante di ricercare con misure molto precise se nei cristalli

magnetici si notano delle deviazioni dalle leggi di Fresnel. A questa ricerca sperimentale sto ora attendendo; intanto mi propongo di sviluppare le leggi di propagazione di onde piane nei cristalli, partendo dalle equazioni fondamentali di Hertz [1]

$$
\begin{aligned}
\mu_{11}\frac{\partial L}{\partial t}+\mu_{12}\frac{\partial M}{\partial t}+\mu_{13}\frac{\partial N}{\partial t}&=\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z}\\
\mu_{21}\frac{\partial L}{\partial t}+\mu_{22}\frac{\partial M}{\partial t}+\mu_{23}\frac{\partial N}{\partial t}&=\frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x}\\
\mu_{31}\frac{\partial L}{\partial t}+\mu_{32}\frac{\partial M}{\partial t}+\mu_{33}\frac{\partial N}{\partial t}&=\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}
\end{aligned}
\qquad (1a)
$$

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{11}\frac{\partial X}{\partial t}+\varepsilon_{12}\frac{\partial Y}{\partial t}+\varepsilon_{13}\frac{\partial Z}{\partial t}&=\frac{\partial M}{\partial z}-\frac{\partial N}{\partial y}\\
\varepsilon_{21}\frac{\partial X}{\partial t}+\varepsilon_{22}\frac{\partial Y}{\partial t}+\varepsilon_{23}\frac{\partial Z}{\partial t}&=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial L}{\partial z}\\
\varepsilon_{31}\frac{\partial X}{\partial t}+\varepsilon_{32}\frac{\partial Y}{\partial t}+\varepsilon_{33}\frac{\partial Z}{\partial t}&=\frac{\partial L}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial x}
\end{aligned}
\qquad (1b)
$$

in cui L, M, N ed X, Y, Z sono le componenti della forza magnetica ed elettrica; le $\varepsilon_{hk}=\varepsilon_{kh}$ e $\mu_{hk}=\mu_{kh}$ le costanti dielettriche e magnetiche del cristallo moltiplicate per il rapporto della quantità di elettricità in misura elettromagnetica a quella in misura elettrostatica.

« Assumiamo come componenti u, v, w del vettore luminoso le componenti della polarizzazione elettrica ponendo

$$u=\varepsilon_{11}X+\varepsilon_{12}Y+\varepsilon_{13}Z\,,\quad v=\varepsilon_{21}X+\varepsilon_{22}Y+\varepsilon_{23}Z\,,\quad w=\varepsilon_{31}X+\varepsilon_{32}Y+\varepsilon_{33}Z \qquad (2)$$

« Trattiamo dapprima il caso in cui gli assi principali magnetici ed elettrici coincidano. Allora, facendo cadere il sistema di assi coordinati col detto sistema di assi di simmetria, potremo dare alle (1) ed alla (2) la seguente forma:

$$
\begin{aligned}
\mu_1\frac{\partial L}{\partial t}&=\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z}\\
\mu_2\frac{\partial M}{\partial t}&=\frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x}\\
\mu_3\frac{\partial N}{\partial t}&=\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}
\end{aligned}
\qquad (3a)
\qquad\qquad
\begin{aligned}
\varepsilon_1\frac{\partial X}{\partial t}&=\frac{\partial M}{\partial z}-\frac{\partial N}{\partial y}\\
\varepsilon_2\frac{\partial Y}{\partial t}&=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial L}{\partial z}\\
\varepsilon_3\frac{\partial Z}{\partial t}&=\frac{\partial L}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial x}
\end{aligned}
\qquad (3b)
$$

$$u=\varepsilon_1 X\quad,\quad v=\varepsilon_2 Y\quad,\quad w=\varepsilon_3 Z \qquad (4)$$

[1] H. Hertz, *Ueber die Grundgleichungen der Electrodynamik für ruhende Körper*, Gött. Nachr. März 1890; Wied. Annalen XL, 1890, 577.

« Derivando le ($3b$) rispetto a t potremo coll'aiuto delle ($3a$) e delle (4) eliminare le L, M, N e le X, Y, Z e giungere a:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{1}{\varepsilon_1 \mu_2 \mu_3}\left(\mu_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu_2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \mu_3 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) - \mu_1 \frac{\partial H}{\partial x} \\
\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \frac{1}{\varepsilon_2 \mu_3 \mu_1}\left(\mu_1 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \mu_2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \mu_3 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) - \mu_2 \frac{\partial H}{\partial y} \qquad (5) \\
\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \frac{1}{\varepsilon_3 \mu_1 \mu_2}\left(\mu_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu_3 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) - \mu_3 \frac{\partial H}{\partial z}
\end{aligned}$$

in cui $H = \frac{1}{\varepsilon_1 \mu_2 \mu_3} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon_2 \mu_3 \mu_1} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\varepsilon_3 \mu_1 \mu_2} \frac{\partial w}{\partial z}$.

« Per integrare queste equazioni supponiamo onde polarizzate linearmente col porre

$$u = AM \cos \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{mx + ny + pz}{\omega}\right), \quad v = AN \cos \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{mx + ny + pz}{\omega}\right)$$

$$w = AP \cos \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{mx + ny + pz}{\omega}\right) \qquad (6)$$

in cui m, n, p sono i coseni direttori della normale all'onda; M, N, P i coseni direttori del vettore luminoso, A la sua ampiezza, T la durata di vibrazione luminosa, ω la velocità di propagazione dell'onda. Varranno quindi le relazioni

$$\begin{aligned}
m^2 + n^2 + p^2 = M^2 + N^2 + P^2 = 1 \\
mM + nN + pP = 0 \qquad (7)
\end{aligned}$$

« Sostituendo le (6) nelle (5) si trova:

$$\begin{aligned}
\frac{M\omega^2}{\mu_1} &= \frac{M}{\varepsilon_1}\left(\frac{m^2}{\mu_2 \mu_3} + \frac{n^2}{\mu_3 \mu_1} + \frac{p^2}{\mu_1 \mu_2}\right) - m\left(\frac{mM}{\varepsilon_1 \mu_2 \mu_3} + \frac{nN}{\varepsilon_2 \mu_3 \mu_1} + \frac{pP}{\varepsilon_3 \mu_1 \mu_2}\right) \\
\frac{N\omega^2}{\mu_2} &= \frac{N}{\varepsilon_2}\left(\frac{m^2}{\mu_2 \mu_3} + \frac{n^2}{\mu_3 \mu_1} + \frac{p^2}{\mu_1 \mu_2}\right) - n\left(\frac{mM}{\varepsilon_1 \mu_2 \mu_3} + \frac{nN}{\varepsilon_2 \mu_3 \mu_1} + \frac{pP}{\varepsilon_3 \mu_1 \mu_2}\right) \\
\frac{P\omega^2}{\mu_3} &= \frac{P}{\varepsilon_3}\left(\frac{m^2}{\mu_2 \mu_3} + \frac{n^2}{\mu_3 \mu_1} + \frac{p^2}{\mu_1 \mu_2}\right) - p\left(\frac{mM}{\varepsilon_1 \mu_2 \mu_3} + \frac{nN}{\varepsilon_2 \mu_3 \mu_1} + \frac{pP}{\varepsilon_3 \mu_1 \mu_2}\right)
\end{aligned}$$

che potrò anche scrivere nella forma

$$\begin{aligned}
M &= \frac{m}{\frac{\mathsf{M}^2}{\varepsilon_1} - \frac{w^2}{\mu_1}}\left(\frac{mM}{\varepsilon_1 \mu_2 \mu_3} + \frac{nN}{\varepsilon_2 \mu_3 \mu_1} + \frac{pP}{\varepsilon_3 \mu_1 \mu_2}\right) \\
N &= \frac{n}{\frac{\mathsf{M}^2}{\varepsilon_2} - \frac{w^2}{\mu_2}}\left(\frac{mM}{\varepsilon_1 \mu_2 \mu_3} + \frac{nN}{\varepsilon_2 \mu_3 \mu_1} + \frac{pP}{\varepsilon_3 \mu_1 \mu_2}\right) \qquad (8) \\
P &= \frac{p}{\frac{\mathsf{M}^2}{\varepsilon_3} - \frac{w^2}{\mu_3}}\left(\frac{mM}{\varepsilon_1 \mu_2 \mu_3} + \frac{nN}{\varepsilon_2 \mu_3 \mu_1} + \frac{pP}{\varepsilon_3 \mu_1 \mu_2}\right)
\end{aligned}$$

in cui $\mathsf{M}^2 = \frac{m^2}{\mu_2 \mu_3} + \frac{n^2}{\mu_3 \mu_1} + \frac{p^2}{\mu_1 \mu_2}$.

« Col sistema di fattori m, n, p le (8) forniscono per la (7)

$$\frac{m^2}{\frac{M^2}{\varepsilon_1}-\frac{\omega^2}{\mu_1}}+\frac{n^2}{\frac{M^2}{\varepsilon_2}-\frac{\omega^2}{\mu_2}}+\frac{p^2}{\frac{M^2}{\varepsilon_3}-\frac{\omega^2}{\mu_3}}=0 \qquad (9a)$$

la quale relazione ci fornisce la velocità ω di propagazione di un'onda per mezzo della direzione (m, n, p) della sua verticale.

« Alla $(9a)$ si può anche dare la forma

$$\frac{m^2}{\frac{E^2}{\mu_1}-\frac{\omega^2}{\varepsilon_1}}+\frac{n}{\frac{E^2}{\mu_2}-\frac{\omega^2}{\varepsilon_2}}+\frac{p^2}{\frac{E^2}{\mu_3}-\frac{\omega^2}{\varepsilon_3}}=0 \qquad (9b)$$

in cui $E^2=\frac{m^2}{\varepsilon_2\,\varepsilon_3}+\frac{n^2}{\varepsilon_3\,\varepsilon_1}+\frac{p^2}{\varepsilon_1\,\varepsilon_2}$ ovvero ancora

$$\omega^4-\omega^2\left[m^2\left(\frac{1}{\varepsilon_2\,\mu_3}+\frac{1}{\varepsilon_2\,\mu_2}\right)+n^2\left(\frac{1}{\varepsilon_3\,\mu_1}+\frac{1}{\varepsilon_1\,\mu_3}\right)+p^2\left(\frac{1}{\varepsilon_1\,\mu_2}+\frac{1}{\varepsilon_2\,\mu_1}\right)\right]$$

$$+\left(\frac{m^2}{\varepsilon_2\,\varepsilon_3}+\frac{n^2}{\varepsilon_3\,\varepsilon_1}+\frac{p^2}{\varepsilon_1\,\varepsilon_2}\right)\left(\frac{m^2}{\mu_2\,\mu_3}+\frac{n^2}{\mu_3\,\mu_1}+\frac{p^2}{\mu_1\,\mu_2}\right)=0 \qquad (9c)$$

da cui si vede come si possano scambiare fra di loro le ε e le μ, come era da prevedere data la simmetria del sistema di equazioni differenziali da cui si era partiti.

« Se in ogni direzione m, n, p si portano le rispettive velocità di propagazione date dalle (9) si ottiene una superficie, la cui equazione è data in coordinate polari dalle (9), detta superficie delle velocità normali.

« Se indichiamo con o^2 ed e^2 le due radici di ω^2 nelle (9) e contrassegniamo con un indice i rispettivi coseni direttori del vettore luminoso, avremo per le (8):

$$M_0\,M_e+N_0\,N_e+P_0\,P_e$$

$$=\frac{1}{o^2-e^2}\left(\frac{m\,M_0}{\varepsilon_1\,\mu_2\,\mu_3}+\frac{n\,N_0}{\varepsilon_2\,\mu_3\,\mu_1}+\frac{p\,P_0}{\varepsilon_3\,\mu_1\,\mu_2}\right)\left(\frac{m\,M_e}{\varepsilon_1\,\mu_2\,\mu_3}+\frac{n\,N_e}{\varepsilon_2\,\mu_3\,\mu_1}+\frac{p\,P_e}{\varepsilon_3\,\mu_1\,\mu_2}\right)\cdot$$

$$\left|\frac{m^2\,\mu_1}{\frac{M^2}{\varepsilon_1}-\frac{o^2}{\mu_1}}+\frac{n^2\,\mu_2}{\frac{M^2}{\varepsilon_2}-\frac{o^2}{\mu_2}}+\frac{p^2\,\mu_3}{\frac{M^2}{\varepsilon_3}-\frac{o^2}{\mu_3}}-\frac{m^2\,\mu_1}{\frac{M^2}{\varepsilon_1}-\frac{e^2}{\mu_1}}-\frac{n^2\,\mu_2}{\frac{M^2}{\varepsilon_2}-\frac{e^2}{\mu_2}}-\frac{p^2\,\mu_3}{\frac{M^2}{\varepsilon_3}-\frac{e^2}{\mu_3}}\right|$$

e quindi in generale *le due direzioni di vibrazione delle due onde appartenenti alla medesima normale non saranno più ad angolo retto.* Questa ortogonalità avrà però sempre luogo quando la normale all'onda giace in un piano di simmetria; così se $m=0$, sarà per una delle due radici $N=0$, $P=0$, $M/\varepsilon_1=\omega^2/\mu_1$ e l'espressione di sopra si annullerà.

« La condizione affinchè le due radici di ω^2 sieno eguali, risulta dalla (9c) in

$$\left[m^2\left(\frac{1}{\varepsilon_2\,\mu_3}+\frac{1}{\varepsilon_3\,\mu_2}\right)+n^2\left(\frac{1}{\varepsilon_3\,\mu_1}+\frac{1}{\varepsilon_1\,\mu_3}\right)+p^2\left(\frac{1}{\varepsilon_1\,\mu_2}+\frac{1}{\varepsilon_2\,\mu_1}\right)\right]^2$$
$$-4\left(\frac{m^2}{\varepsilon_2\,\varepsilon_3}+\frac{n^2}{\varepsilon_3\,\varepsilon_1}+\frac{p^2}{\varepsilon_1\,\varepsilon_2}\right)\left(\frac{m^2}{\mu_2\,\mu_3}+\frac{n^2}{\mu_3\,\mu_1}+\frac{p^2}{\mu_1\,\mu_2}\right)=0\,.$$

Ora ponendo

$$A=m^2\left(\frac{1}{\varepsilon_2\,\mu_3}-\frac{1}{\varepsilon_3\,\mu_2}\right)\,,\quad B=n^2\left(\frac{1}{\varepsilon_3\,\mu_1}-\frac{1}{\varepsilon_1\,\mu_3}\right)\quad C=p^2\left(\frac{1}{\varepsilon_1\,\mu_2}-\frac{1}{\varepsilon_2\,\mu_1}\right)$$

essa condizione si può scrivere

$$A^2+B^2+C^2-2BC-2CA-2AB=0\,.$$

Ora se due delle tre quantità A , B , C sono dello stesso segno, la terza è di segno contrario. Così se p. e.

$$\frac{1}{\varepsilon_2\,\mu_3}>\frac{1}{\varepsilon_3\,\mu_2}\ \text{e}\ \frac{1}{\varepsilon_1\,\mu_2}>\frac{1}{\varepsilon_2\,\mu_1}\quad\text{sarà}\quad\frac{1}{\varepsilon_1\,\mu_3}>\frac{1}{\varepsilon_3\,\mu_1}$$

e quindi due delle tre quantità A , B , C sono dello stesso segno, la terza di segno contrario. Se A e C sono dello stesso segno, io scriverò la condizione di sopra

$$(A+B-C)^2-4AB=0\,.$$

Ora il membro a sinistra è una quantità positiva che si annulla solo se $A+B-C=0$, $AB=0$ ossia avendo B e C segno opposto se $B=0$, $A=C$; dunque avremo

$$n=0\,,\ m^2=\frac{\dfrac{1}{\varepsilon_1\,\mu_2}-\dfrac{1}{\varepsilon_2\,\mu_1}}{\left(\dfrac{1}{\varepsilon_1}-\dfrac{1}{\varepsilon_3}\right)\dfrac{1}{\mu_2}-\left(\dfrac{1}{\mu_1}-\dfrac{1}{\mu_3}\right)\dfrac{1}{\varepsilon_2}}\,,\ p^2=\frac{\dfrac{1}{\varepsilon_2\,\mu_3}-\dfrac{1}{\varepsilon_3\,\mu_2}}{\left(\dfrac{1}{\varepsilon_1}-\dfrac{1}{\varepsilon_3}\right)\dfrac{1}{\mu_2}-\left(\dfrac{1}{\mu_1}-\dfrac{1}{\mu_3}\right)\dfrac{1}{\varepsilon_2}}\,.$$

In tal caso sarà pure

$$\frac{M^2}{\varepsilon_2}-\frac{\omega^2}{\mu_2}=0$$

e quindi nella seconda delle (8) si avrà $N=\frac{0}{0}$ e quindi la direzione di vibrazione è indeterminata. Restano quindi gli *assi ottici* colle loro proprietà caratteristiche.

« Quanto abbiamo sinora esposto vale nel caso che non ci sia proporzionalità fra le costanti dielettriche e magnetiche. Se invece si ha, per esempio, $\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}=\frac{\varepsilon_3}{\mu_3}$ si vede dalla (9c) che la superficie delle velocità normali

si decompone nelle due

$$\omega^2 = \frac{\mu_1}{\varepsilon_1}\left(\frac{m^2}{\mu_2\,\mu_3} + \frac{n^2}{\mu_3\,\mu_1} + \frac{p^2}{\mu_1\,\mu_2}\right)$$

$$\omega^2 = \frac{\varepsilon_1}{\mu_1}\left(\frac{m^2}{\varepsilon_2\,\varepsilon_3} + \frac{n^2}{\varepsilon_3\,\varepsilon_1} + \frac{p^2}{\varepsilon_1\,\varepsilon_2}\right)$$

In questo caso si avrebbe un cristallo *uniasse*, giacchè si ha un solo asse ottico (nell'ultimo caso $m = 0$, $p = 0$, $n = 1$); però importa notare che *quest'asse non è asse di rivoluzione*. Se poi $\frac{\varepsilon_1}{\mu_1} = \frac{\varepsilon_2}{\mu_2} = \frac{\varepsilon_3}{\mu_3}$ la superficie delle velocità normali si riduce a

$$\omega^2 = \frac{\mu_1}{\varepsilon_1}\left(\frac{m^2}{\mu_2\,\mu_3} + \frac{n^2}{\mu_3\,\mu_1} + \frac{p^2}{\mu_1\,\mu_2}\right)$$

e quindi si avrebbe *un cristallo monorifrangente ma con diversa velocità di propagazione luminosa nelle diverse direzioni*, cioè *un corpo anisotropo monorifrangente!* »

Fisica. — *Sulle scariche elettriche nel rame e nel ferro.* Nota del Prof. P. Cardani, presentata dal Socio Blaserna.

« Il titolo di questa Nota è anche il titolo di uno dei capitoli più interessanti del libro di Lodge sui « Lightning conductors and lightning guards »; e la questione che in esso si riassume, di determinare cioè se il miglior conduttore delle scariche elettriche sia il ferro od il rame, forma, direi quasi, l'argomento più importante di tutte le sue ricerche, perchè intimamente collegato col problema dei parafulmini.

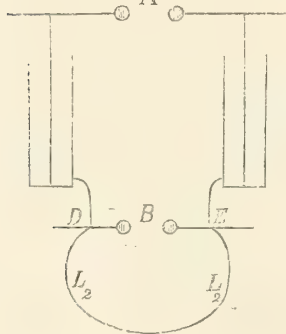



Fig. 1.

« È noto che il Lodge determinò la resistenza del conduttore L_2 ad una data scarica, dalla lunghezza massima della scintilla B (fig. 1) che saltava in uno spinterometro posto in derivazione alle estremità del conduttore medesimo.

« I risultati a cui il Lodge è pervenuto si possono ritenere compendiati nella seguente tabella [1]:

« Lunghezza del filo conduttore L_2 = cm. 1220.

« Lunghezza della scintilla principale A = cm. 2,54.

	Resistenza ohmica	Diametro	Lunghezza critica della scintilla B
Grosso filo di rame N° 1	ohm 0,025	cm. 0,32	cm. 3,63
Ordinario filo di rame N° 19	» 2,720	» 0,03	» 3,40
Grosso filo di ferro N° 1	» 0,086	» 0,45	» 2,74
Ordinario filo di ferro N° 18	» 3,550	» 0,07	» 2,74
Sottilissimo filo di ferro N° 27	» 33,300	» 0,023	» 2,61

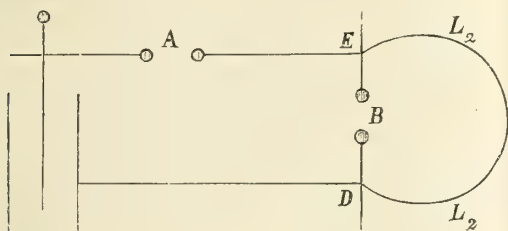
[1] Lodge, *Lightning conductors and lightning guards*, pag. 36.

dalla quale tabella si possono ricavare le seguenti due proposizioni:

« 1° La resistenza dei conduttori alle scariche si può ritenere come indipendente dal loro diametro:

« 2° Il ferro è, sebbene in piccolo grado, miglior conduttore delle scariche del rame.

« L'esperienza del Lodge si può ripetere in molti altri modi: per esempio colla disposizione della figura 2. Con questa disposizione il Murani (1) otteneva quasi gli stessi risultati generali del Lodge, solamente il ferro presentava una resistenza alquanto superiore a quella del rame.

Fig. 2.

« Ma le differenze, relativamente alla conducibilità del ferro e del rame per le scariche, erano così piccole, tanto nelle esperienze del Lodge che in quelle del Murani, da potersi ritenere in generale che il ferro ed il rame presentino alle scariche eguale resistenza.

« La misura della resistenza dei conduttori ad una scarica era fondata nel metodo di Lodge sulla differenza massima di potenziale che si otteneva alle estremità D, E del conduttore L_2 sottoposto all'esperienza, nel momento in cui si produceva la scarica medesima, essendo come è noto, dovuta a questa differenza massima di potenziale la lunghezza massima della scintilla B dello spinterometro derivato.

« Un secondo metodo per confrontare le resistenze dei conduttori alle scariche, si può avere dai fenomeni termici. Disponendo i due conduttori da confrontare L_1 ed L_2 tra loro in derivazione, e ponendo in serie con essi due speciali termometri perfettamente eguali T_1 e T_2, come nella fig. 3, dal calore svolto nei due termometri si potrà dedurre da quale dei due rami passi la maggior quantità della scarica, che si suddivide nella derivazione, e quale sia quindi il ramo derivato che presenta maggiore resistenza. Con questo metodo il Villari (2)

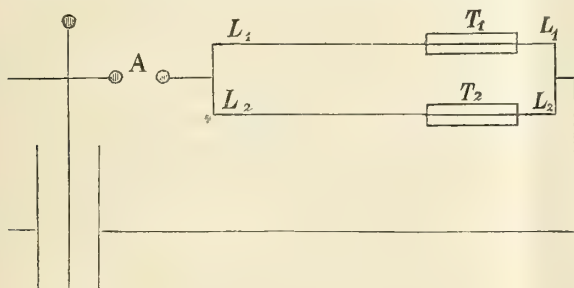



Fig.

(1) Murani, *Parafulmini*, pag. 22 e 27.

(2) Villari, *Sulla resistenza elettrica opposta da alcuni circuiti metallici alla scarica dei condensatori od alla corrente della pila*. Nuovo Cimento, Serie III^a, tom. 26, pag. 154.

aveva trovato, che adoperando due fili, uno di ferro e l'altro di rame, di eguale lunghezza e di eguale diametro, il ferro presentava una resistenza inferiore, sebbene di poco, al filo di rame: mentre Lord Kelvin e Gall [1] con un metodo analogo stabilivano che il rame era decisamente miglior conduttore del ferro.

« Per la misura delle resistenze dei conduttori alle scariche ho proposto e seguito nelle ricerche che ho avuto fin qui occasione di fare, un terzo metodo [2]: nel circuito di scarica della batteria si dispone una derivazione formata di fili identici per natura e per diametro e che chiamerò *derivazione normale* (fig. 4). L'uno dei lati L_1 si mantenga di lunghezza invariabile, l'altro L_2 sia invece di lunghezza variabile, e si supponga di determinare, per ogni lunghezza di L_2, la quantità di calore Q_1 che si svolge nel lato L_1. Sostituendo in seguito ad L_2 i conduttori di cui si vuol confrontare la resistenza alle scariche, si potrà dalle quantità di calore Q_1 svolte in L_1 conoscere quali lunghezze del filo L_2 presentavano nella derivazione normale una resistenza ad essi equivalente.

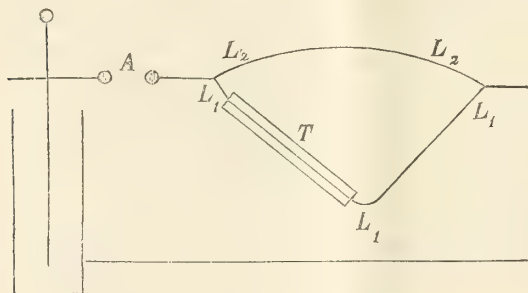



Fig. 4

« L'esattezza del metodo si fonda sulle seguenti due proposizioni, che ho dimostrato coll'esperienza [3]:

« 1° la resistenza del filo L_2 alle scariche è proporzionale alla sua lunghezza;

« 2° per ogni determinata quantità di calore che si svolge in L_2, corrisponde una determinata ed *unica* quantità di calore svolta in L_1.

« Dalla prima di queste proposizioni risulta che le lunghezze del filo normale, che poste nel ramo L_2 della derivazione fanno svolgere in L_1 una quantità di calore eguale a quella che si svolge quando in L_2 si trova il conduttore di cui si cerca la resistenza, offrono una misura della resistenza del conduttore medesimo. Dalla seconda risulta invece che se i fenomeni di auto-induzione modificano le distribuzioni delle correnti nei due rami della derivazione, le modificano in modo che ad una quantità di calore Q_1 svolta in L_1 corrisponde sempre un'altra quantità determinata ed *unica* di calore Q_2 svolta in L_2, di modo che cambiando per esempio il diametro dei fili e

(1) Lord Kelvin e A. Gall, *Expériences préliminaires pour comparer la décharge d'une bouteille de Leyde à travers différentes branches d'un circuite divisé. — Éclairage Éléctrique*, tom. I, N° 1, 1895.

(2) Cardani, *Sui fenomeni termici delle scariche nei circuiti derivati e sulla resistenza dei conduttori*. Nuovo Cimento, Serie IV^a, vol. 2°, agosto 1895, ed ottobre 1895.

(3) Vedi per maggiori dettagli la Memoria citata precedentemente.

quindi il loro coefficiente di auto-induzione, le misure delle resistenze così ottenute sono sempre tra loro paragonabili.

« La derivazione normale da me adoperata era formata di filo di platino di cm. 0,03 di diametro: la lunghezza del ramo L_1 era di 200 cm.: al ramo L_2 si diedero successivamente le seguenti lunghezze:

30 cm., 50 cm., 100 cm., 200 cm., 300 cm., 400 cm., 500 cm. e 600 cm.,

e per ognuna di queste lunghezze si determinò la quantità di calore svolta in L_1: per tale scopo metà del filo L_1 era contenuta in uno speciale termometro-calorimetro a petrolio, e le variazioni di volume del petrolio, per il calore svolto dalla scarica nel filo, si leggevano in un tubo capillare sopra una scala millimetrata [1]. Le quantità di calore svolte nel filo erano proporzionali agli spostamenti del menisco del petrolio nel tubo capillare: per cui le divisioni che si ottenevano come spostamento del menisco davano, in unità arbitraria, una misura del calore svolto nel filo.

« Nelle attuali ricerche aveva di mira un doppio scopo:

« 1° stabilire possibilmente in modo sicuro se il ferro fosse o no miglior conduttore del rame per le scariche;

« 2° esaminare se i risultati ottenuti dal Lodge si potessero estendere ai fili sottilissimi.

« Come è noto, i risultati del Lodge si devono principalmente al fatto che le correnti di scarica dei condensatori, essendo nelle ordinarie condizioni oscillatorie ed a periodo rapidissimo, sono confinate in uno strato estremamente sottile alla superficie del conduttore che serve ad esse di guida: per la qual cosa tutti i conduttori si comportano presso a poco nell'identico modo. Mi sembrava quindi di molto interesse di cercare quel che dovesse avvenire riducendo successivamente la sezione del filo, in modo da obbligare la corrente di scarica a dover penetrare in tutta la sezione del filo. Era infatti probabile che in tali condizioni i risultati del Lodge dovessero venire profondamente modificati.

« Per questo ho estese le mie ricerche fino ai diametri più piccoli che si potessero praticamente ottenere, e cioè sino al diametro di 0,005 cm.

« Trascrivo i risultati ottenuti con due serie di esperienze coi fili di rame e di ferro.

Serie I^a.

« Quattro batterie, formate ciascuna di 10 grandi condensatori cilindrici, erano disposte in cascata: e cioè, due di esse isolate avevano le armature interne comunicanti coi poli di una grande macchina di Voss, e le armature esterne comunicanti colle armature interne delle altre due batterie. Queste ultime avevano le armature esterne comunicanti tra loro e comunicanti col

[1] Vedi la descrizione del termometro-calorimetro nella Mem. precedentemente cit.

suolo. Dalle armature interne delle due batterie isolate partiva il circuito di scarica che conteneva la derivazione, sulla quale si facevano le esperienze e le misure, e lo spinterometro.

« La distanza esplosiva A fu posta eguale a 2 cm.

« Per aver deviazioni più forti nel termometro si facevano scoccare 5 scintille in 1 minuto : e si teneva conto dell'andamento del termometro nel minuto precedente ed in quello seguente a quello della esperienza per la correzione del calore scambiato tra il termometro e l'ambiente.

« I risultati ottenuti furono i seguenti :

Derivazione normale.

Per L_2 = cm.	30	50	100	200	300	400	500	600
Divisioni ottenute nel termometro del ramo L_1	7,5	15,1	34,6	66,7	92,8	106,5	118,5	125,0

« Coi numeri della seconda riga, che sono la media di molte misure, presi come ordinate e coi numeri della prima riga come ascisse, si è tracciata la curva che dava la legge colla quale si modificava la quantità di calore svolta in L_1 col variare della lunghezza del filo L_2.

Esperienze coi fili di rame e di ferro.

« I fili di rame e di ferro venivano posti successivamente a formare il lato L_2 della derivazione : la loro lunghezza comune fu di cm. 50. Dalle quantità di calore svolte nel termometro del ramo L_1 si ottenevano, per mezzo della curva prima tracciata, le lunghezze del filo di platino normale che presentavano una resistenza equivalente a ciascuno di essi.

Diametro in mm.	Divisioni ottenute nel termometro del ramo L_1		Lunghezza del filo normale di resistenza equivalente	
	coi fili di Rame	coi fili di Ferro	ai fili di Rame	ai fili di Ferro
0,500	10,0	9,8	cm. 36,2	cm. 36,0
0,300	11,5	11,5	40,5	40,5
0,200	13,0	12,6	44,0	43,0
0,090	15,3	14,9	50,5	49,2
0,060	16,5	16,0	53,2	51,8
0,033	19,2	17,0	59,7	54,0
0,025	19,8	17,4	60,7	55,5
0,020	19,7	17,5	60,5	55,7
0,018	19,2	17,5	59,7	55,7
0,016	19,1	19,5	59,5	60,3
0,014	18,7	29,1	58,7	86,0
0,012	18,4	38,0	58,0	110,0
0,010	17,0	50,8	54,2	147,0
0,009	17,4	60,7	55,5	178,0
0,008	18,6	76,6	58,5	235,0
0,007	19,9	88,3	61,5	283,0
0,006	26,2	105,0	77,0	380,0
0,005	41,5	?	120,0	?

Serie IIª.

« La disposizione della batteria è identica alla precedente: la distanza esplosiva A si pone eguale ad 8 cm.

« Il calore svolto nel termometro è dovuto in questa serie ad 1 sola scintilla.

Derivazione normale.

Per L_2 = cm.	30	50	100	200	300	400
Divisioni ottenute nel termometro del ramo L_1	4,5	9,2	20,5	40,0	54,0	62,0

Esperienze coi fili di rame e di ferro.

« Anche in questa serie i fili adoperati ebbero tutti la lunghezza di 50 cm. Coi numeri della derivazione normale si è tracciata, come nella Iª serie, la curva per dedurre le lunghezze del filo di platino normale che presentavano resistenze equivalenti a quelle dei diversi fili di ferro e di rame adoperati.

Diametro in cm.	Divisioni ottenute nel termometro del ramo L_1		Lunghezza del filo normale di resistenza equivalente	
	coi fili di Rame	coi fili di Ferro	ai fili di Rame	ai fili di Ferro
0,500	4,8	4,5	cm. 31,0	cm. 30,0
0,300	5,2	5,2	33,0	33,0
0,200	6,0	6,0	37,0	37,0
0,090	7,8	7,5	44,0	43,0
0,060	8,8	8,2	48,0	46,0
0,025	10,4	10,2	54,5	54,0
0,020	11,2	12,0	58,0	61,0
0,018	11,5	13,1	59,0	66,5
0,016	11,7	17,9	59,5	87,0
0,014	11,7	31,3	59,5	152,0
0,012	12,0	39,4	61,0	199,0
0,010	11,8	52,5	60,0	290,0
0,009	13,5	58,5	68,0	350,0
0,008	15,5	63,5	77,0	436,0
0,007	20,5	?	100,0	?

« Dall'esame, dei prospetti che riassumono le esperienze delle due serie, si possono ricavare le seguenti conseguenze:

« 1° Il rame ed il ferro nei diametri maggiori si comportano rispetto alle scariche nell'identico modo: ma la loro resistenza diminuisce lentamente col crescere del diametro.

« 2° Nei diametri medi presentano un comportamento alquanto diverso, secondo le condizioni nelle quali si fanno le esperienze: così nelle condizioni della prima serie, il ferro si mostra meno resistente del rame, in quelle della seconda serie non si rileva invece alcuna differenza apprezzabile.

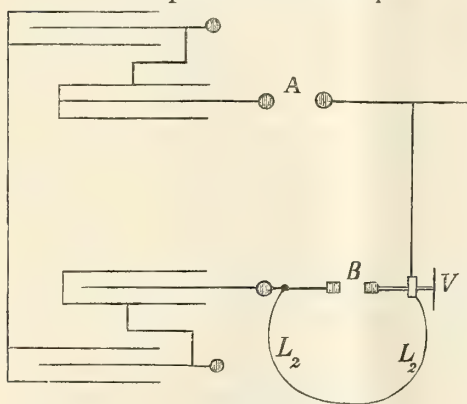
« 3° Nei diametri sottilissimi il comportamento è del tutto diverso. La loro resistenza dopo essere rimasta costante sino ad un certo diametro (nel rame essa presenta anzi una lieve diminuzione) sale rapidissimamente

col diminuire del diametro e coll'aumentare della quantità di elettricità che prende parte al fenomeno. Il diametro al quale comincia questo rapido accrescimento della resistenza, varia a seconda delle condizioni delle esperienze, e precisamente esso comincia ad un diametro tanto maggiore, quanto maggiore è la quantità di elettricità che si scarica. Questo diametro a parità di condizioni è molto maggiore nel ferro che nel rame, per cui *per i fili sottilissimi il ferro è molto più resistente alle scariche del rame.*

« I risultati di queste mie ricerche confermano per i fili di diametro grosso e di diametro medio, i risultati ottenuti dal Lodge, dal Murani e dal Villari: solamente la maggior precisione delle misure permette di rilevare quelle differenze, che la resistenza offre col variare del diametro, e che forse sfuggivano col metodo delle scariche laterali di Lodge.

« Ma per i fili sottilissimi siamo in presenza di fenomeni nuovi: essi presentano una resistenza variabile da metallo a metallo, e quindi una resistenza specifica, e per di più questa resistenza è dipendente della quantità di elettricità che circola attraverso di essi: della qual cosa può trovarsi probabilmente la spiegazione nel fatto, che i fili devono esser portati a temperature tanto più elevate quanto maggiore è la quantità di elettricità che si scarica.

« Siccome nei fili medi e nei fili grossi, i risultati delle mie esperienze concordavano con quelli ottenuti dal Lodge, ho creduto conveniente verificare se anche coi fili estremamente sottili si abbiano col metodo di Lodge i risultati superiormente riferiti.

« La disposizione delle esperienze è quella della fig. 5. Le quattro batterie sono disposte in cascata. Nel circuito di scarica è collocato in A lo spinterometro principale, in B lo spinterometro per le misure con vite micrometrica V. Dalle estremità di questo spinterometro si diparte il filo L_2 sottoposto all'esperienza.

ig. 5.

« La lunghezza del filo L_2 fu nelle esperienze seguenti di 100 cm.

« Ho dapprima sperimentato con fili di rame e di ferro di cm. 0,2 di diametro: eccone i risultati.

Filo di rame. — Lunghezza della scintilla A = 8 cm.

Con	8,0	giri	della	vite	micrometrica	saltano	in	B	10	scintille	sopra 10
"	8,4	"	"	"	"	"	"	"	8	"	" 10
"	8,6	"	"	"	"	"	"	"	4	"	" 10
"	8,75	"	"	"	"	"	"	"	1	"	" 10
"	9,0	"	"	"	"	"	"	"	0	"	" 10

« La lunghezza critica della scintilla B è dunque giri 8,55.

Filo di ferro. — Lunghezza della scintilla A = 8 cm.

Con 8,0 giri della vite micrometrica saltano in B 10 scintille sopra 10

„ 8,5 „ „ „ „ „ „ „ 9 „ „ 10

„ 8,7 „ „ „ „ „ „ „ 5 „ „ 10

„ 9,0 „ „ „ „ „ „ „ 2 „ „ 10

„ 9,1 „ „ „ „ „ „ „ 0 „ „ 10

« La lunghezza critica della scintilla B è di giri 8,7.

« Le esperienze dimostrano che in queste condizioni il rame ed il ferro conducono egualmente le scariche.

Esperienze con fili sottilissimi.

« Per queste esperienze ho scelto i fili di 0,01 cm. di diametro.

Lunghezza della scintilla principale A = 2 cm.

Filo di rame.

Con 4,75 giri della vite micrometrica saltano in B 10 scintille sopra 10

„ 5,00 „ „ „ „ „ „ „ 6 „ „ 10

„ 5,25 „ „ „ „ „ „ „ 0 „ „ 10

« La lunghezza critica della scintilla B è di giri 5,00.

Filo di ferro.

Con 12,0 giri della vite micrometrica saltano in B 10 scintille sopra 10

„ 12,5 „ „ „ „ „ „ „ 8 „ „ 10

„ 12,75 „ „ „ „ „ „ „ 5 „ „ 10

„ 13,00 „ „ „ „ „ „ „ 2 „ „ 10

„ 13,25 „ „ „ „ „ „ „ 0 „ „ 10

« La lunghezza critica della scintilla B è di giri 12,75.

Lunghezza della scintilla principale A = 4 cm.

Filo di rame.

Con 9,50 giri della vite micrometrica saltano in B 10 scintille sopra 10

„ 9,75 „ „ „ „ „ „ „ 5 „ „ 10

„ 10,00 „ „ „ „ „ „ „ 0 „ „ 10

« La lunghezza critica della scintilla B è di giri 9,75.

Filo di ferro.

Con 35 giri della vite micrometrica la scintilla salta ancora nello spinterometro B, ma il filo si rompe.

Lunghezza della scintilla principale A = 8 cm.

Filo di Rame.

« Con 13,5 giri della vite micrometrica la scintilla salta ancora nello spinterometro B: con 14 giri non salta più.

« La lunghezza critica della scintilla B è di giri 13, 75.

Filo di Ferro.

« Con 50 giri della vite micrometrica la scintilla salta ancora nello spinterometro B, ma il filo a questo punto si rompe.

« Col metodo di Lodge si arriva per i fili sottilissimi, come risulta dalle esperienze precedenti, agli stessi risultati ottenuti col metodo dei fenomeni termici.

« Dal complesso dei fenomeni e delle esperienze, riferite nella presente Nota, parmi che si possa stabilire definitivamente quanto segue;

I. Adoperando grossi conduttori in modo che la scarica possa mantenere il carattere di esser confinata in uno strato di spessore trascurabile rispetto alla sezione del conduttore, il ferro ed il rame si comportano sensibilmente nello stesso modo.

II. Quando invece la sezione dei conduttori è talmente sottile che la scarica debba occupare quasi uniformemente la sezione medesima, il rame ed il ferro presentano una resistenza totalmente diversa l'uno dall'altro: il ferro si comporta come molto più resistente del rame, e la loro resistenza cresce col diminuire del diametro molto rapidamente e dipende dalla quantità di elettricità che prende parte alla scarica.

« Questi fenomeni che presentano i fili sottilissimi, mi sembrano di molto interesse per la teoria delle scariche: ho già pronto uno studio completo su questi fenomeni che sarà tra breve pubblicato distesamente: ho però voluto riferire subito i risultati ottenuti per il ferro e per il rame, essendo questi i due metalli che presentano il maggior interesse per le loro applicazioni ».

Chimica. — *Sul lapaconone. Nuova sostanza estratta dal legno di lapacho.* Nota di F. Crosa e C. Manuelli, presentata dal Socio Paternò [1].

« Incaricati dal prof. Paternò di di estrarre dell'acido lapacico da un legno di lapagio speditogli dal prof. Arata di Buenos-Aires fino dal 1882, durante il trattamento con barite in una grande caldaia, abbiamo avvertito un odore molto pronunciato, e fummo perciò spinti a studiare la sostanza che si volatilizzava.

(1) Lavoro eseguito nel R. Istituto Chimico dell'Università di Roma.

« Da una prima distillazione in corrente di vapore fatta con circa 200 gr. di segatura abbiamo ottenuti pochi decigrammi di una sostanza giallastra, la cui insolubilità nei carbonati alcalini, ed il punto di fusione molto basso, perchè già fondeva nell'acqua calda prima molto che questa arrivasse all'ebollizione, ci dissero non trattarsi di acido lapacico. Con una cristallizzazione dall'alcool abbiamo ottenuto il prodotto cristallizzato in belle lamine quasi bianche, e fondenti verso 62°. Non rimaneva alcun dubbio, la sostanza estratta non poteva essere acido lapacico.

« Per consiglio del prof. Paternò, che mise a nostra disposizione molto legno, abbiamo intrapresa l'estrazione del nuovo corpo per poterlo studiare. Lo abbiamo chiamato *lapaconone*.

« *Estrazione della sostanza.* — Per l'estrazione ci serviamo di una caldaia di rame, nella quale si fa arrivare il vapore da uno degli ordinarî generatori per mezzo di un tubo che comunica lateralmente con l'esterno. Alla caldaia si adatta come agli alambicchi, un cappello al quale per mezzo di un collo d'oca è congiunto un refrigerante fatto con una lunga canna da combustione. Una tubulatura del cappello permette di aggiungere nuova acqua, quando occorra; il livello del liquido nella caldaia si misura per mezzo del tubo adduttore del vapore. Per ogni operazione si impiegano circa 2 kg. di legno in segatura, dai quali in una ventina di giorni si ottengono in media 30 gr. di prodotto greggio, che facilmente solidifica e si raccoglie poi per filtrazione. Le acque filtrate sono colorate in giallo e da queste con etere si estrae un liquido denso, bruno, che in parte distilla verso 180°, ed al quale è dovuto l'odore che si sente pure nella distillazione del legno. Da parecchie diecine di litri d'acqua non abbiamo ottenuto che pochi grammi di liquido, e perciò non ce ne siamo occupati.

« Il prodotto raccolto per filtrazione contiene piccole quantità di acido lapacico, che si separa facilmente trattando a caldo con soluzione di carbonato sodico, filtrando e lavando con acqua la parte indisciolta. Il lapaconone così trattato si cristallizza dall'alcool a 80°; con una sola cristallizzazione si ottiene bianco ed abbastanza puro per le ricerche ordinarie: il prodotto cristallizzato costituisce il 90 per cento del prodotto primitivo.

« Per avere la sostanza assolutamente pura, bisogna cristallizzarla molte volte dall'alcool diluito (circa a 60°); si presenta allora in sottilissime laminette molto brillanti, con lucentezza serico madreperlacea, fondenti a 61°,5; quando sono regolarmente sviluppate, hanno l'aspetto di rombi il cui angolo è di circa 75° (e rispettivamente 105°).

« Un esame preliminare di questi cristalli pare li classifichi nel sistema trimetrico.

« L'analisi ha dato i seguenti risultati:

I. gr. 0,3705 di sostanza hanno dato gr. 0,2301 di H_2O e gr. 1,0853 di CO_2.
II. gr. 0,3842 di sostanza hanno dato gr. 0,2397 di H_2O e gr. 1,1255 di CO_2.

« Calcolando per 100 parti si ha

	I.	II.	media
H	6,89	6,93	6,91
C	79,86	79.88	79,87

« Qusti valori conducono alla formula C_8H_8O per la quale si calcola per cento

H	6,66
C	80,00

« Col metodo crioscopico abbiamo determinato il peso molecolare; le esperienze vennero fatte impiegando come solvente la benzina e l'acido acetico.
1ª solvente, benzina

sostanza °/₀	abbassamento	peso molec.
0,54	0.14	192
1.06	0.26	203
4.14	0.94	218
2ª solvente, acido acetico		
0,83	0,13	248
1,08	0,165	255
4,59	0,890	201

« Questi risultati ci hanno condotti ad ammettere per il lapaconone la formula doppia $C_{16}H_{16}O_2$ per la quale si ha un peso molecolare di 240.

« Il lapaconone oltrechè nell'alcool, nella benzina e nell'acido acetico, è solubile in tutti i comuni solventi organici e le soluzioni presentano un fenomeno abbastanza strano. Per azione della luce, da incolore divengono gialle e la colorazione si fa sempre più intensa, lentamente alla luce diffusa rapidamente ai raggî diretti del sole; con l'oscurità la colorazione scompare. L'esperienza si può ripetere indefinitivamente con una stessa soluzione, a meno che la lunga azione della luce diretta abbia reso il liquido affatto bruno.

« La luce non ha alcuna azione sulla sostanza secca.

« Alla luce polarizzata le soluzioni in benzina sono inattive.

« *Composto picrico.* — La soluzione alcoolica concentrata e calda di lapaconone, per l'aggiunta di una soluzione pure alcoolica satura di acido picrico assume una colorazione *rosso bruna* intensa, e pel raffreddamento si separano dei lunghi aghi finissimi quasi neri, che raccolti su filtro, lavati abbondantemente con alcool, e seccati nel vuoto, fondono a 145°.

« L'esperienza venne fatta con gr. 4 di sostanza e con la quantità equimolecolare di acido picrico. Il prodotto ottenuto fondente a 145°, ricristallizzato dall'alcool si presenta di nuovo in aghi colorati un po' meno intensamente dei precedenti, i quali lavati e seccati come i primi, fondono a 155-156°.

Questo secondo prodotto ricristallizzato fonde a 153° e conserva lo stesso aspetto di quello fondente a 155°. I tre prodotti osservati al microscopio non lasciano scorgere di esser inquinati di acido picrico.

gr. 0,2533 di prodotto fondente a 145° hanno dato 18,3 cc. di azoto alla temperatura di 17° ed alla pressione di mm. 765, da che si calcola *N per cento 8,40.*

gr. 0,2485 di prodotto fondente a 155° hanno dato 23 cc. di azoto alla temperatura di 16° ed alla pressione di mm. 759,74, da che si calcola *N per cento 10,97.*

gr. 0,1276 di prodotto fondente a 153° hanno dato 16 cc. di azoto alla temperatura di 16 ed alla pressione di 760 mm., da che si calcola *N per cento 10,65.*

« I risultati delle analisi conducono per i tre prodotti a tre formule diverse

pel primo alla formula $C_{16}H_{16}O_2 . C_6H_2OH(NO_2)_3$
pel secondo alla formula $2C_{16}H_{16}O_2 . 3C_6H_2OH(NO_2)_3$
pel terzo alla formula $C_{16}H_{16}O_2 . 4C_6H_2OH(NO_2)_3$
per le quali si calcola N per cento: 1°, 8,95 2°, 10,79 3°, 14,52.

« L'ottenersi per semplice ricristallizzazione un prodotto sempre più ricco in acido picrico, oltrechè esser prova della poca stabilità del composto, indica la necessità di un eccesso di lapaconone perchè il picrato si formi; ed a conferma di ciò sta il fatto, che impiegando una quantità di acido picrico metà della necessaria per avere un prodotto equimolecolare, si forma prima il prodotto fondente a 145°, e dalle acque madri alcooliche si può, concentrando, riottenere il lapaconone inalterato. Questi composti picrici si alterano per la lunga azione della luce, e sono decomposti, oltrechè dagli alcali, dalla sola acqua bollente, dimodochè distillati in corrente di vapore passa il lapaconone inalterato, e molto puro.

« *Ossidazione con acido nitrico.* — Grammi 5 di sostanza vennero riscaldati in apparecchio a ricadere con 200 cc. di acido nitrico diluito (densità 1,12). La sostanza l'abbiamo aggiunta poco alla volta all'acido bollente, e non veniva aggiunta la nuova porzione che dopo completa ossidazione della porzione precedente. L'operazione durò circa 10 ore. In questo modo la sostanza si sciolse quasi tutta, la porzione rimasta indisciolta, circa gr. 0,5 era costituita da una massa spugnosa rossastra friabile, che dopo raffreddamento abbiamo separato per filtrazione. Il filtrato neutralizzato con carbonato sodico venne ridotto a piccolo volume. Durante l'evaporazione il liquido ha assunta una colorazione nerastra e per filtrazione si separarono delle resine dello stesso colore. Acidificando con acido solforico, abbiamo ottenuto un precipitato abbondante, il quale raccolto e cristallizzato dall'acqua si presenta in cristalli colorati leggermente in giallo, fondenti malamente verso 184°, nè ci fu pos-

sibile ottenerli incolori e fondenti bene ricristallizzandoli. Una porzione di questi scaldati sublimarono in lunghi aghi trasparenti incolori fondenti a 128°: gr. 0,2545 di questo prodotto fondente a 128° hanno dato gr. 0,0706 di H_2O e gr. 0,6063 di CO_2, calcolando si ha per cento parti

C 64,94
H 3,04

« L'azione dell'acido nitrico fu in questo caso ossidante e le proprietà del prodotto di ossidazione, nonchè l'analisi della sostanza ottenuta per sublimazione, non lasciano alcun dubbio sulla sua natura. Il prodotto d'ossidazione è acido ortoftalico, che fonde a 184° e pel calore si trasforma nell'anidride fondente a 128°, e per la quale si calcola per cento

C 64,86
H 2,70

« L'ossidazione fu ripetuta riscaldando in una sola volta cinque grammi di lapaconone con la voluta quantità di acido, e concentrando direttamente il liquido dal quale cristallizzò l'acido ftalico.

« Nelle due operazioni il rendimento non superò il 10 per cento del lapaconone impiegato.

« *Trattamento con pentacloruro di fosforo.* — La reazione con pentacloruro di fosforo avviene scaldando la sostanza solida con il pentacloruro a bagno maria, e benchè la reazione proceda non molto energica, il rendimento nel prodotto della reazione è piccolissimo, nè abbiamo potuto farlo aumentare variando le condizioni dell'esperienza.

« Per ogni operazione abbiamo riscaldato 2 gr. di lapaconone con 4 gr. di pentacloruro di fosforo a b. m. sino a cessato sviluppo di acido cloridrico, il che avviene dopo $\frac{1}{2}$ ora circa: terminata la reazione, il prodotto di color rossastro, lavato con acqua e carbonato sodico, prese una colorazione verde bruna; in corrente di vapore distillò una sostanza solida bianca che abbiamo cristallizzato dall'alcool, e bastarono poche cristallizzazioni per averla pura, fondente a 108°. Questo prodotto è solubile in tutti i comuni solventi organici. Le soluzioni negli eteri di petrolio, per lenta evaporazione alla temperatura ordinaria, lasciano separare dei grossi cristalli che sono prismi rombici probabilmente monoclini.

« All'analisi gr. 0,2613 di sostanza hanno dato (metodo Carius) gr. 0,2445 di cloruro di argento.
gr. 0,2593 di sostanza hanno dato gr. 0,1014 di H_2O e gr. 0,5866 di CO_2.

« Calcolando per 100 parti si ha

Cl 23,11
H 4,34
C 61,66

« Questi valori conducono alla formula $C_{16}H_{14}O_2Cl_2$ per la quale si calcola

Cl	22,97
H	4,53
C	62,13

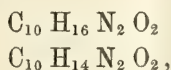
« Il pentacloruro di fosforo anzichè agire sull'ossigeno ha sostituito due atomi di idrogeno con due di cloro, e questi due atomi di alogeno rimangono saldamente legati nella molecola, nè ci fu possibile toglierli con idrogeno nascente (sodio ed alcool, amalgama di sodio ed acido acetico), nè con potassa alcoolica riscaldando a ricadere per 1 ora, ne con potassa acquosa in tubo chiuso a 120° per 2 ore.

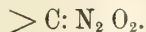
« Questo stesso bicloro-lapaconone si ottiene per azione del pentacloruro di fosforo sulle soluzioni, in benzina e cloroformio del lapaconone; e per azione del pentacloruro sulla sostanza secca in tubo chiuso a 200°.

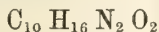
« Sostituendo al pentacloruro il tricloruro di fosforo si ottiene oltre il biclorolapaconone, un altro prodotto dovuto all'azione dell'acido cloridrico che si sviluppa sul lapaconone: di questo ci occuperemo in una prossima comunicazione ».

Chimica. — *Sull'azione dell'acido nitroso sopra la canforossima.* Nota di Angelo Angeli, presentata dal Socio Ciamician.

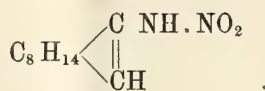
« In un precedente lavoro, assieme al dott. E. Rimini (1), io ho descritto due composti interessanti, che per il momento chiamerò *pernitrosocanfora* e *pernitrosocanfenone*:

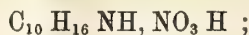
$$C_{10}H_{16}N_2O_2$$
$$C_{10}H_{14}N_2O_2,$$

e che si formano per azione dell'acido nitroso sopra la canforossima e sopra la canfenonossima. Io aveva ammesso fin d'allora come probabile che nelle nuove sostanze il gruppo N_2O_2 fosse unito ad uno stesso atomo di carbonio, secondo lo schema:

$$> C: N_2O_2.$$

« Contemporaneamente al nostro è comparso un lavoro di F. Tiemann (2) in cui è descritta la stessa sostanza

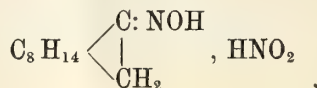
$$C_{10}H_{16}N_2O_2$$

(1) Berl. Berichte XXVIII, 1077; Gazzetta chimica XXV (I) 406.
(2) Berl. Berichte XXVIII, 1079.

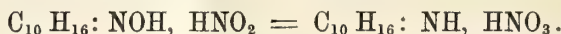
da noi ottenuta, ed alla quale l'illustre chimico, in seguito ad una serie di interessanti ricerche, assegna la struttura

$$C_8H_{14}\left\langle\begin{array}{l}C\ NH.NO_2\\ \|\\ CH\end{array}\right. ,$$

chiamandola *canfenilnitrammina*. Il Tiemann la prepara facendo passare l'acido nitroso in una soluzione eterea di canforossima. In tal modo, dapprima si separa un composto che egli chiama nitrato di canferimmina:

$$C_{10}H_{16}NH, NO_3H\ ;$$

per evaporazione del solvente rimane la sostanza che egli riguarda come canfenilnitrammina e che dalla precedente differisce per una molecola di acqua in meno.

« Secondo il Tiemann, nell'azione dell'acido nitroso sopra la canforossima, dapprima si forma il corrispondente nitrito

$$C_8H_{14}\left\langle\begin{array}{l}C: NOH\\ |\\ CH_2\end{array}\right. , HNO_2 ,$$

il quale tosto si trasforma per dare il nitrato di canferimmina, isomero:

$$C_{10}H_{16}: NOH,\ HNO_2 = C_{10}H_{16}: NH,\ HNO_3 .$$

« Sarebbe appunto da questo nitrato che, per eliminazione di una molecola di acqua, secondo il Tiemann, si formerebbe la nitrammina. La formazione di questo composto, nel caso nostro sarebbe dovuta, sempre secondo lo stesso autore, alla presenza dell'acido acetico glaciale che funzionerebbe da disidratante.

« Per quanto però le esperienze e le considerazioni del Tiemann sieno ingegnose, tuttavia io ho avuto occasione di osservare alcuni fatti i quali, a quanto mi sembra, non stanno in buona armonia con le sue vedute.

« In primo luogo io ho trovato che la pernitrosocanfora (canfenilnitrammina di Tiemann) si forma dalla canforossima anche operando in soluzione acquosa diluitissima. Basta p. e. sciogliere un paio di grammi di canforossima in qualche centimetro cubico di acido acetico e versare la soluzione ottenuta in mezzo litro d'acqua, cui si sia aggiunto un po' di nitrito sodico, perchè dopo breve tempo la reazione sia completa ed il rendimento in pernitrosocanfora pressochè quantitativo. È chiaro che in queste condizioni, secondo l'ipotesi del Tiemann, sarebbe piuttosto da ottenersi una soluzione di nitrato di canferimmina.

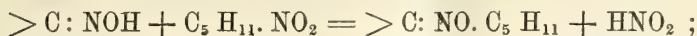
« La stessa sostanza si forma inoltre quando, invece dell'acido nitroso libero, si impieghi il nitrito d'amile.

« A questo scopo si scioglie la canforossima nel nitrito d'amile, oppure alla soluzione eterea di canforossima si aggiunge nitrito d'amile. Dopo breve tempo si separano aghettini bianchi del nitrato di canferimmina, mentre in soluzione rimane la pernitrosocanfora. Anzi questo è il metodo più comodo per preparare il nitrato suddetto.

« Quando si adoperi il nitrito d'amile a me non sembra che si possa ammettere che in una prima fase si formi il nitrito dell'ossima

$$> C : NOH , HNO_2 \ ,$$

giacchè in questo caso non v'ha presente acido nitroso libero. A meno che non si supponga che dapprima avvenga uno scambio parziale fra l'ossima ed il nitrito d'amile con formazione di acido nitroso libero:

$$> C : NOH + C_5 H_{11} . NO_2 = > C : NO . C_5 H_{11} + HNO_2 \ ;$$

oppure che avvenga reazione fra l'acido nitroso, e l'etere della canforossima. Ma anche quest'ultima supposizione non regge, avendo io trovato che l'acido nitroso non reagisce, a parità di condizioni, sopra l'etere etilico della canforossima.

« Ma vi ha di più ancora, avendo io trovato che il nitrito d'amile reagisce sopra la canforossima anche in presenza di un alcali.

« Alla soluzione di una molecola di canforossima in alcool assoluto si aggiunge la soluzione alcoolica di un atomo di sodio, e nel miscuglio ben raffreddato si versa una molecola di nitrito d'amile. Dopo un paio di giorni circa, si tratta con poca acqua, si estrae con etere e nella soluzione acquosa si fa passare una corrente di anidride carbonica. In tal modo vanno separandosi gocce oleose che non tardano a rapprendersi in grandi cristalli di pernitrosocanfora. Questo modo di formazione, in presenza di alcali, mi sembra escludere l'ipotesi del Tiemann, secondo la quale, come ho detto, sarebbe necessaria la presenza dell'acido nitroso libero.

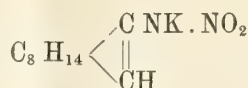
« D'altra parte, sempre secondo le vedute del Tiemann, sembrerebbe cosa facile trasformare il nitrato di canferimmina nel corrispondente derivato anidrico. Io non ho tralasciato di fare alcune esperienze in proposito, ma i miei tentativi sono rimasti finora infruttuosi. Mi limiterò ad accennare soltanto che il nitrato in parola si può ricristallizzare dall' anidride acetica a caldo. Eppure, dalle interessanti ricerche del Bamberger, è noto che l'anidride acetica si presta assai bene per trasformare i nitrati nelle corrispondenti nitrammine.

« Inoltre la sostanza in parola non possiede i caratteri delle nitrammine e per riduzione non fornisce sostanze riducenti (idrazina), come sarebbe da aspettarsi e come fanno le vere nitrammine.

« Secondariamente, per trattamento con acido solforico concentrato non dà origine nemmeno a tracce di acido nitrico. Eppure tale reazione è carat-

teristica per questa classe di composti, e tutte le nitrammine, la nitrammide compresa, per azione dell'acido solforico concentrato si decompongono con formazione di acido nitrico (reazione di Thiele e Lachmann) [1].

« Nella mia Nota citata io aveva detto che il composto è insolubile negli alcali acquosi ed il Tiemann conferma questa osservazione: questo autore però ha trovato che per trattamento con alcoolato potassico esso può dare un sale della composizione [2]:

$$C_8H_{14}\langle\begin{matrix} C\,NK.NO_2 \\ \| \\ CH \end{matrix}$$

« Anche le proprietà esplosive di questo sale, secondo il Tiemann, parlano in favore di tale formola; a quanto io mi sappia però questo è un carattere molto comune ai sali dei composti organici contenenti residui ossigenati dell'azoto. Ma, anche prescindendo da queste considerazioni, io ho osservato un altro fatto interessante e che merita di esser preso in attento esame.

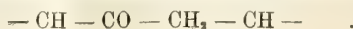
« Il sale potassico, preparato secondo le indicazioni del Tiemann, è colorato in giallo chiaro e si scioglie nell'acqua con colorazione del pari giallognola; acidificando con precauzione e filtrando rapidamente, si ottiene un composto il quale è del pari giallognolo e che a differenza del composto primitivo (p. fus. 43°), fonde verso 57°. Il prodotto in tal modo ottenuto, appena preparato, si scioglie rapidamente ed in modo quasi completo negli alcali acquosi diluiti, che invece non intaccano il composto primitivo. La sostanza abbandonata all'aria poco a poco diventa incolora per poi fondere a 43°. Anzi dirò che a questo riguardo si può osservare un fenomeno curioso: il prodotto dopo aver fuso intorno a 57°, solidifica di nuovo; poi, abbandonato a sè stesso, fonde un'altra volta per poi ritornare solido; allora fonde a 43°.

« A mio modo di vedere, questo comportamento conduce ad ammettere che il composto potassico descritto dal Tiemann, anzichè essere un sale vero e proprio, sia piuttosto da riguardarsi come un prodotto di addizione dell'idrato o dell'alcoolato alcalino. Il prodotto che fonde a 57° e che si ottiene per acidificazione del sale in soluzione acquosa, molto probabilmente è un idrato, che all'aria perde l'acqua per trasformarsi nel composto primitivo. Sarebbe questo idrato appunto, solubile negli alcali diluiti, quello a cui spetta la proprietà di dare sali.

« Aggiungerò inoltre che secondo la formola proposta dal Tiemann, la sostanza si presenta come non satura; io ho trovato invece che essa è stabile

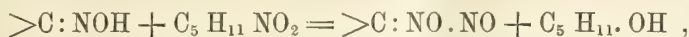
(1) Lachmann, *Ueber Nitroharnstoff* etc. Inaugural-Dissertation. München 1895.

(2) Anche il pernitrosocanfenone può dare un sale analogo; ammessa l'ipotesi del Tiemann, resterebbe sperimentalmente dimostrato che la canfora contiene la catena:

$$-CH-CO-CH_2-CH- \quad .$$

rispetto al permanganato, e questo comportamento, come è noto, è caratteristico per i composti saturi.

« Io ho determinato infine anche il peso molecolare dalla sostanza in soluzione benzolica, ed i numeri che in tal modo si ottengono sono pressochè teorici; anche questo fatto ha un certo valore, giacchè si sa che la maggior parte delle sostanze che contengono atomi d'idrogeno a funzione acida, danno valori anormali disciolti in benzolo.

« Ancora sarebbe prematuro fare delle ipotesi intorno alla costituzione della pernitrosocanfora. Dirò soltanto che la sua formazione, per azione del nitrito d'amile sopra l'ossima della canfora, ricorda fino ad un certo punto la formazione degli eteri dell'acido nitroso per azione del nitrito d'amile sopra alcuni alcooli. Mi sembra quindi giusto l'ammettere che anche nel caso da me descritto avvenga dapprima la reazione:

$$>C:NOH + C_5H_{11}NO_2 = >C:NO.NO + C_5H_{11}.OH \ ,$$

e che come primo prodotto si formi l'etere nitroso della canforossima.

« Quale sia il nuovo assetto che assume l'aggruppamento

$$>C:N.O.NO$$

resta naturalmente ancora da stabilirsi, ed oltre alle possibilità considerate nel mio lavoro citato, accennerò ancora alle due seguenti:

$$>C\begin{matrix}\diagup N - O \\ \quad | \qquad | \\ \diagdown N - O\end{matrix} \qquad\qquad >C\begin{matrix}\diagup N - O \\ \qquad \diagdown \ | \\ \diagdown O - N\end{matrix} \quad .$$

« Ad ogni modo, dirò fin d'ora, che io inclino a ritenere le sostanze da me descritte come appartenenti ad una nuova classe di composti organici »

Mineralogia. — *Apatite dell'Elba.* Nota di Ettore Artini, presentata dal Socio Strüver.

« La presenza dell'Apatite tra i minerali cristallizzati nelle druse del granito elbano fu notata già nel 1872 dal Grattarola [1] che ne descrisse brevemente alcuni piccoli cristalletti, di colore roseo-violetto, della semplice combinazione

$$\{2\bar{1}\bar{1}\}\ \{10\bar{1}\}\ \{100\,.\,22\bar{1}\}\ \{111\}.$$

« Nel riordinare la collezione elbana formata dal Pisani, e donata al Museo Civico di Milano dal comm. C. Erba, mi fu dato rinvenire alcuni

[1] Grattarola, *Sopra alcuni minerali dell'Isola d'Elba non ancora descritti o accennati.* Bollettino del R. Comitato Geologico, 1872, p. 290.

esemplari che presentano cristallini ben definiti di questa specie così rara all'Elba.

« Le dimensioni ne sono esigue, superando essi raramente i 2 mm., sia nella direzione dell'asse di simmetria senaria, come nelle direzioni ad esso normali: il colore è quello stesso violetto o roseo-violetto più o meno pallido già osservato dal Grattarola; l'abito è di prismi tozzi.

« I cristallini, isolati, o riuniti in gruppetti, sempre poco appariscenti, sono accompagnati a preferenza, negli esemplari in questione, da lepidolite, tormalina rosea, petalite, quarzo, ortoclasio, e albite. Essi hanno talvolta facce scabre, poco atte a misure goniometriche, e presentano la combinazione già osservata dal Grattarola; ma in altri campioni ebbi la ventura di osservarne parecchi ben formati, brillanti e ricchi di facce, così che mi parvero degni di particolare menzione.

« Presentano essi, riferendosi alla forma fondamentale del Naumann, la combinazione delle forme seguenti (fig. 1):

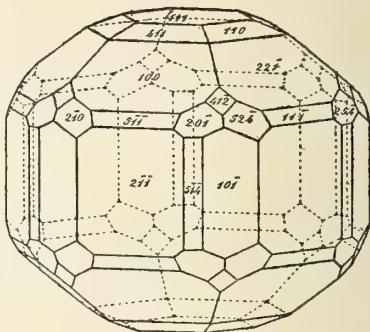
$\}111\{$ $\}2\bar{1}\bar{1}\{$ $\}10\bar{1}\{$ $\}5\bar{1}\bar{4}\{$ $\}5\bar{1}\bar{1}.11\bar{1}\{$
$\}100.22\bar{1}\{$ $\}411.110\{$
$\}41\bar{2}\{$ $\}20\bar{1}.25\bar{4}\{$ $\}2\bar{1}0.52\bar{4}\{$.

Fig. 1.

« Le facce del prisma esagono di 1° ordine sono alquanto più ampie che quelle del prisma di 2° ordine; subordinate, e talora mancanti quelle del prisma di 3° ordine $\}5\bar{1}\bar{4}\{$: tutte queste facce prismatiche striate poi sempre parallelamente all'asse di simmetria, talora ondulate, così che, quantunque brillino bene, sono poco adatte ad esatte misure.

« Delle tre piramidi di 1° ordine è quasi costantemente più sviluppata la $\}100.22\bar{1}\{$; con faccette brillanti, ma assai piccole, si presenta invece la piramide di 2° ordine $\}41\bar{2}\{$.

« Riguardo alle piramidi del 3° ordine è notevole la presenza simultanea sullo stesso cristallo delle due forme $\}20\bar{1}.25\bar{4}\{$ e $\}2\bar{1}0.52\bar{4}\{$; così che in quanto alle piramidi il cristallo non ha abito emiedrico, tanto più che le facce delle due forme destra e sinistra si mostrano generalmente con eguale sviluppo. Il fatto, per quanto meritevole di nota, non è nuovo, poichè, com' è noto, la coesistenza di quelle due stesse forme venne già osservata su cristalli di varie località da v. Rath, Hessenberg, Schrauf e Klein [1].

« Finalmente, la base, per lo più non molto estesa, è in generale piana, solamente talora come alcun poco appannata; riflette però sempre una immagine netta.

[1] Confr.: C. Klein, *Mineral. Mittheil.*, I, 2, *Apatit vom Obersulzbach im Pinzgau und von Poncione della Fibia am S. Gotthard.* Neues Jahrb. fur Min. etc. 1871, p. 485.

« Per il calcolo della costante cristallografica, mi servii dell'angolo misurato il maggior numero di volte, con risultati discretamente buoni; e cioè

$$(100).(111) = 40°,18',48'';$$

da questo si calcola l'angolo del romboedro fondamentale:

$$(100).(010) = 68°,9',6'',$$

e sugli assi esagonali un rapporto parametrico:

$$a : c = 1 : 0,7347895.$$

« Se si confrontano questi valori con quelli trovati da varî autori per l'Apatite di diverse località, si vede come l'Apatite dell'Elba stia per questo riguardo quasi ad una estremità della serie, tra quella di Schlaggenwald e quella di Ehrenfriedersdorf; cioè, secondo la teoria di Pusyrewsky e Kokscharow (1), sostenuta recentemente con nuove esperienze da Baumhauer (2), tra le più pure fluorapatiti. Non è certo possibile, almeno per ora, fare un'analisi dei rari cristallini elbani, il massimo dei quali non arriva al peso di due centigrammi, per tentare di dosarvi il contenuto in Cl, che secondo ogni verisimiglianza dovrebbe essere infinitesimo o nullo affatto; ma è certo che, qualunque possa essere il valore che deve attribuirsi alla teoria di Pusyrewsky, specialmente dopo le più recenti ricerche di Hoskyns-Abrahall (3), e qualunque possa essere la causa dalla quale dipendono le forti variazioni che indubbiamente si osservano nei valori angolari delle apatiti provenienti dalle varie località, è importante vedere le apatiti di località granitiche più o meno stannifere (è nota la presenza della cassiterite nel granito elbano) raggrupparsi così strettamente ad una estremità della serie; e non si può non pensare, spontaneamente, quasi direi involontariamente, alla teoria delle emanazioni fluorifere cui da taluni autori si ricorre per spiegare appunto la genesi dei giacimenti stanniferi.

« I risultati delle misure, posti a confronto coi valori calcolati, sono esposti nella seguente tabella:

(1) Kokscharow, *Mineral. Russlands*, V, p. 86.

(2) Baumhauer, *Ueber die Winkelverhältnisse des Apatit v. verschiedenen Fundorten.* Zeit. f. Kryst. XVIII, p. 31.

(3) Hoskyns-Abrahall, *Ueber die Zusammensetzung des Apatits.* Inaugural Dissertation, München, 1889.

Spigoli misurati	n.	P.	Limiti delle osservazioni	Angoli osservati Medie	Angoli calcolati
$(2\bar{1}\bar{1}).(11\bar{2})$	3	6	59°.57′ — 60°.1′	59°.59′.40″	60°.00′.00″
$(2\bar{1}\bar{1}).(10\bar{1})$	8	14	29. 53 — 30. 11	30. 00. 34	30. 00. 00
$(10\bar{1}).(1\bar{1}0)$	1	2	—	59. 56. 00	60. 00. 00
$(2\bar{1}\bar{1}).(5\bar{1}\bar{4})$	5	5	18. 51 — 19. 17	19. 2. 12	19. 6. 24
$(10\bar{1}).(5\bar{1}\bar{4})$	1	1	—	10. 56. 00	10. 53. 36
(100). (111)	15	34	40. 14 — 40. 26	40. 18. 48	*
$(5\bar{1}\bar{1}).(111)$	2	2	59. 14 - 59. 30	59. 22. 00	59. 29. 21
(411). (111)	4	5	22. 50 — 23. 4	22. 56. 00	22. 59. 17
$(100).(2\bar{1}\bar{1})$	10	20	49. 34 — 49. 43	49. 40. 24	49. 41. 12
$(5\bar{1}\bar{1}).(2\bar{1}\bar{1})$	4	5	30. 26 — 30. 35	30. 32. 24	30. 30. 39
$(411).(2\bar{1}\bar{1})$	5	5	66. 55 — 67. 3	66. 59. 36	67. 00. 43
$(41\bar{2}).(10\bar{1})$	6	11	34. 6 — 34. 25	34. 13. 55	34. 14. 2
$(20\bar{1}).(5\bar{1}\bar{4})$	2	4	24. 3 — 24. 10	24. 6. 30	24. 00. 42
$(2\bar{1}\bar{1}).(20\bar{1})$	6	8	30. 14 — 30. 29	30. 19. 52	30. 19. 44
$(20\bar{1}).(41\bar{2})$	7	14	13. 47 — 13. 56	13. 53. 00	13. 56. 50
$(41\bar{2}).(22\bar{1})$	6	12	26. 44 — 26. 49	26. 46. 50	26. 51. 00
$(2\bar{1}\bar{1}).(22\bar{1})$	1	2	—	71. 8. 00	71. 7. 35
$(22\bar{1}).(010)$	7	15	37. 40 — 37. 46	37. 42. 24	37. 44 51
$(10\bar{1}).(20\bar{1})$	5	7	26. 5 — 26. 17	26. 9. 9	26. 13. 59
$(20\bar{1}).(100)$	4	6	29. 31 — 29. 41	29. 35. 50	29. 41. 28
$(10\bar{1}).(100)$	1	2	—	55. 51. 00	55. 55. 27
(100). (110)	2	4	34. 2 — 34. 7	34. 4. 30	34. 4. 33
$(41\bar{2}).(14\bar{2})$	2	4	48. 34 — 48. 46	48. 40. 00	48. 50. 2
$(5\bar{1}\bar{1}).(41\bar{2})$	9	14	25. 16 — 25. 32	25. 25. 51	25. 30. 58
$(20\bar{1}).(22\bar{1})$	1	2	—	40. 45. 00	40. 47. 51
$(5\bar{1}\bar{1}).(20\bar{1})$	6	9	17. 58 — 18. 10	18. 3. 20	18. 9. 16
$(2\bar{1}0).(20\bar{1})$	2	3	34. 30 — 34. 38	34. 32. 40	34. 47. 43
$(20\bar{1}).(52\bar{4})$	5	9	19. 44 — 19. 50	19. 48. 6	19. 52. 53

P. B.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 1° dicembre 1895.

F. Brioschi Presidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Chimica. — *Sulla costituzione del dimetil-naftol proveniente dalla scomposizione degli acidi santonosi.* Memoria del Socio S. Cannizzaro e del dott. A. Andreocci.

Questo lavoro sarà pubblicato nei volumi delle Memorie.

Chimica. — *Sulle ricerche eseguite intorno ai cementi idraulici da G. Oddo ed E. Manzella.* Nota del Socio A. Cossa.

« Nei rendiconti dell'Accademia dei Lincei (Vol. IV, 2° semestre, pag. 19) fu recentemente pubblicata una Nota di G. Oddo ed E. Manzella sopra cementi idraulici italiani ed esteri, collo scopo di *studiare comparativamente i cementi che si fabbricano in Italia e quelli che si fabbricano in altre nazioni.* — I campioni di cementi studiati sono quattordici, dei quali otto provenienti da quattro fabbriche italiane e sei da tre fabbriche tedesche ed una francese. Di questi quattordici campioni, dieci (1-10) sono a presa lenta, gli altri (11-14) a rapida presa.

« Certamente il solo studio della composizione chimica mediata di un cemento non può servire a giudicare della natura delle specie chimiche che lo compongono (silicati alluminati ecc.); però si ammette che anche dalla sola composizione centesimale dei cementi idraulici si possono ricavare conseguenze utili per riconoscere il loro valore pratico, a condizione però che

queste conseguenze sieno dedotte con giusto criterio dai risultati di analisi sufficientemente numerose e correttamente eseguite. — Ma a me pare che questo non sia il caso delle indagini analitiche pubblicate da Oddo e Manzella, le quali mi suggeriscono le seguenti osservazioni.

« 1) Nel prospetto riassuntivo delle analisi dei quattordici cementi (pag. 25) l'acido solforico, la potassa e la soda sono calcolati allo stato di idrati. È questa una innavvertenza grave che diminuisce la confidenza nel valore delle analisi.

« 2) Si è trascurato di determinare con saggi microchimici, o almeno con osservazioni microscopiche, la natura delle sostanze insolubili nell'acido cloridrico. Questa determinazione non dovrebbe mancare in analisi, le quali dovevano poi servire come punti di partenza per indagini scientifiche sulla natura dei fenomeni che sono causa della presa dei cementi idraulici.

« 3) Per stabilire che esiste una certa differenza di composizione tra i cementi a lenta ed a rapida presa, gli autori hanno raffrontato la media aritmetica del tenore percentuale dei componenti principali (silice, calce, magnesia, ossidi di ferro e d'alluminio) di *otto* cementi a lenta presa, con la media corrispondente di soli *quattro* cementi a presa rapida; non riflettendo che basta osservare come variano i singoli valori percentuali nelle due serie di cementi per accorgersi, che qualora avessero analizzato un' eguale numero di cementi per ogni serie, con molta probabilità la differenza nella composizione media avrebbe potuto riescire di senso opposto a quella indicata.

« 4) La quantità media della percentuale di magnesia contenuta nei quattro cementi a rapida presa, fu calcolata erroneamente. Infatti gli autori non avendo trovato quantità apprezzabili di magnesia nei primi due cementi (11 e 12), per esprimere la quantità media di magnesia contenuta nei cementi a rapida presa hanno diviso per due, invece che per quattro, la quantità complessiva di magnesia contenuta negli ultimi due campioni !.

« 5) Gli autori fanno rilevare che *tutti* i cementi italiani a pronta presa, eccetto quello segnato col numero progressivo 11, che ha una composizione centesimale del tutto speciale, contengono circa l'uno per cento di calce in più dei cementi esteri. Ora, osservando i risultati delle analisi dei tre cementi a pronta presa analizzati (12, 13, e 14), dei quali due sono di fabbrica italiana e l'altro di provenienza estera, si trova che *uno solo* dei due cementi italiani, e non *tutti*, contiene più calce dell'unico campione di cemento estero. !

« 6) Gli autori affermano che i risultati delle loro analisi dimostrano che valore troppo elevato si diede da Le Chatelier al rapporto limite tra le quantità equivalenti delle basi e degli acidi nei cementi idraulici, ritenendo *a torto* che per questo rapporto Le Chatelier abbia indicato i numeri 3, 16 e 4, 41, che essi erroneamente hanno ricavato da un riassunto contenuto nel rendiconto annuale di chimica tecnologica del Fischer per l'anno 1892 (pag. 658), non comprendendo bene quanto in questo riassunto è indicato. Il testo tede-

sco va invece interpretato nel modo seguente: « Il signor B. Blomel, applicando la formola di Le Chatelier ad un caso affatto speciale, cioè al calcolo dei risultati dell'analisi di un dato cemento eseguita da Michaelis trovò che si ottengono i valori 3, 16 e 4, 41 ». — È noto agli studiosi della chimica applicata ai materiali da costruzione che il valente ingegnere e chimico francese proponendo, in seguito ad una lunga serie di accuratissime ricerche, come limite *massimo* del rapporto tra le quantità equivalenti delle basi e degli acidi in un cemento perfetto il numero 3, si è affrettato a soggiungere che questa composizione ideale non si riscontra nella pratica, nella quale il rapporto suindicato supera quasi mai il valore 2,5.

« A mio parere anche l'altra Nota che Oddo e Manzella hanno pubblicato: col titolo: *Ricerche sui fenomeni che avvengono durante la presa dei cementi* (Rend. Vol. IV, 2° semestre, pag. 38), non ha valore scientifico.

« 1) Il cenno storico premesso dagli autori all'esposizione delle proprie ricerche non è esatto. Dei lavori di Le Chatelier si citano appena le due brevi Note pubblicate nei Rendiconti dell'Accademia delle Scienze di Francia negli anni 1882 e 1883. Se gli autori avessero studiato le voluminose e classiche memorie pubblicate da lui negli anni 1887 e 1893 [1], si sarebbero facilmente convinti che il merito di Le Chatelier non si limita come essi asseriscono, ad aver riscontrato nei cementi con metodi ottici, la presenza di alluminato di calcio e del silicato di calcio di Hendt,

« Le Chatelier ha per il primo escogitato ed attuato un nuovo metodo razionale di ricerche, cominciando a studiare sotto il punto di vista chimico e mineralogico le diverse combinazioni della silice e dell'allumina colla calce, ed il loro modo di comportarsi coll' acqua per cercarne poi la presenza nei cementi idraulici. — Così procedendo, Le Chatelier ha stabilito che tra i molti silicati di calcio, quello tribasico (che è diverso da quello di Hendt) costituisce l'elemento principalmente attivo dei cementi; mentre la presenza del silicato dicalcico ne deteriora la qualità. Fatti questi importanti dai quali scaturirono delle norme molto utili ed apprezzate per la fabbricazione dei buoni cementi artificiali. — Le Chatelier ha poi per il primo dimostrato sperimentalmente quale parte possono avere nella presa dei cementi i fenomeni di soprasaturazione e cristallizzazione.

« 2) Gli autori persuasi che coi metodi di ricerca finora seguiti, non si sia riuscito non solo a risolvere, ma neanche a mettere un poco di luce nella questione della causa della presa dei cementi idraulici, anch' essi desiderosi di coltivare questo campo sperimentale, hanno escogitato un nuovo metodo di

(1) *Recherches expérimentales sur la constitution des mortiers hydrauliques.* Ann. des Mines, 8e série, t. XI (1887), pag. 345-464; *Procédès d'essais des matériaux hydraues.* Ann. des Mines 9e série, t. IV (1893), pag. 252-361 e 367-419.

indagine. — Il metodo è nuovo ma disgraziatamente non ha alcun valore rispetto allo scopo prefisso.

« Infatti gli autori, essendosi proposti per compito delle loro prime ricerche di *definire quale azione spiegano sopra i cementi, sia prima che dopo la presa, l'acqua e l'anidride carbonica, i due agenti principali ai quali i cementi restano sottoposti in natura,* hanno pensato di agitare per parecchie ore la polvere dei cementi in contatto d'una soluzione di carbonato potassico, non riflettendo che il carbonato alcalino in soluzione esercita sui silicati basici contenuti nei cementi una azione specifica ben diversa da quella che potrebbe esercitare l'acqua che tiene in soluzione l'acido carbonico libero. Che si direbbe di quel fisiologo che volendo definire quale sia l'azione dell'acido citrico sull'organismo, impiegasse invece della soluzione dell'acido, una soluzione di citrato di chinina !

« Come era da aspettarsi, i risultati delle esperienze fatte con questo metodo non hanno portato alcun benchè piccolo contributo per la spiegazione delle cause che producono la presa dei cementi. — Dal modo col quale variava il grado alcalimetrico della soluzione salina impiegata, gli autori concludono in un modo troppo generico ed anfibologico che in alcuni cementi la presa è prodotta da *idratazione,* in altri dalla produzione di *sali polibasici disaggregabili.* — Ma era necessario di definire quali sono i componenti che si idratano, e quali specie chimiche sieno i sali polibasici dei cementi.

« Pongo termine a queste osservazioni col dichiarare che sono persuaso che le mende da me avvertite non derivano da incapacità degli autori, ma sono una conseguenza del mal vezzo invalso in alcuni dei nostri giovani studiosi, di pubblicare qualunquesiasi abbozzo delle loro prime ricerche sopra un dato argomento, illudendosi di potere così giovare alla scienza.

« I giovani autori con precedenti pubblicazioni in altro ramo della chimica hanno dimostrato di sapere bene applicare i buoni metodi di indagine scientifica. Si applichino pertanto seriamente anche allo studio chimico dei materiali idraulici, e senza dubbio riesciranno a vincere le molte difficoltà che ancora si oppongono alla soluzione di uno dei più importanti problemi della chimica applicata ».

Astronomia. — *Sulla distribuzione in latitudine dei fenomeni solari osservati al R. Osservatorio del Collegio Romano nel 2° e 3° trimestre del 1895.* Nota del Socio P. TACCHINI.

« Come fu avvertito nelle mie Note precedenti, il numero dei giorni di osservazione fu di 159 per le macchie e per le facole e di 148 per le protuberanze. Calcolai le latitudini eliografiche delle 1069 protuberanze, dei 258

gruppi di facole e 143 di macchie, e da questa latitudine ottenni i seguenti valori per la frequenza dei diversi fenomeni nelle diverse zone di 10 gradi nei due emisferi solari.

1895	Protuberanze		Facole		Macchie	
Latitudini	2° trimestre	3° trimestre	2° trimestre	3° trimestre	2° trimestre	3° trimestre
90° + 80	0,000	0,000				
80 + 70	0,000	0,000				
70 + 60	0,002	0,003				
60 + 50	0,020	0,024				
50 + 40	0,055	0,123		0,000		
40 + 30	0,100	0,112	0,018	0,009		
30 + 20	0,148	0,126	0,084	0,102	0,080	0,073
20 + 10	0,128	0,113	0,205	0,197	0,241	0,305
10 . 0	0,128	0,076	0,151	0,214	0,184	0,122
	0,581	0,577	0,458	0,522	0,505	0,500
0 — 10	0,084	0,073	0,151	0,138	0,115	0,183
10 — 20	0,082	0,100	0,218	0,201	0,300	0,268
20 — 30	0,110	0,084	0,151	0,125	0,080	0,049
30 — 40	0,068	0,100	0,022	0,009		
40 — 50	0,053	0,050		0,005		
50 — 60	0,015	0,007				
60 — 70	0,000	0,004				
70 — 80	0,000	0,003				
80 — 90	0,007	0,002				
	0,419	0,423	0,542	0,478	0,495	0,500

« Nel 2° trimestre le protuberanze furono sempre più frequenti nelle zone boreali, e si manifestarono sempre numerose nella larga zona, che dall'equatore si estende a ± 50°; anche il massimo per zona avvenne nell'emisfero nord. Nel 3° trimestre continua la prevalenza del fenomeno al nord dell'equatore, e come nel precedente trimestre esse continuarono sempre abbastanza numerose dall'equatore fino a ± 50° ed il massimo per zona è pure nell'emisfero boreale nella medesima zona (+ 20° + 30°).

« Le facole nel 2° trimestre non si estesero oltre ai paralleli ± 40°, e il massimo di frequenza loro in ciascun emisfero sta nella zona fra 10° e 20°. Nel 3° trimestre si può dire che le facole si osservarono pure dall'equatore fino a ± 40°, perchè una sola traccia di facola superò il parallelo di 40° al sud: le facole furono molto frequenti dall'equatore fino a ± 20°.

« I gruppi di macchie tanto nel 2° che nel 3° trimestre sono egualmente frequenti al nord e al sud dell'equatore, cioè fino ai paralleli ± 30°, col massimo di frequenza nelle zone ± 10° ± 20°, distribuzione notata ancora per il primo trimestre dell'anno.

« Come vedesi, le facole si estendono a latitudini più elevate in confronto delle macchie, e le protuberanze più delle facole, così che i massimi di frequenza di queste ultime stanno fuori delle regioni di maggior frequenza delle macchie e delle facole.

« Di eruzioni metalliche non ne furono osservate, e si notò ancora in questa serie di osservazioni la mancanza di fenomeni straordinarî sulle macchie, nella cromosfera e nell'atmosfera solare, e ciò mi sembra molto in armonia colla deficienza delle aurore polari ».

Chimica. — *Il veratrol in crioscopia.* Nota del Socio E. Paternò.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Astronomia. — *Sulle due comete scoperte il 17 e il 18 Novembre in America.* Nota del Corrispondente E. Millosevich.

« Ho l'onore di informare l'Accademia che il 17 Novembre (t. civile) il signor Perrine trovava a Lick Observatory una cometa, annunziata nel dispaccio come *lucente* e con *coda;* il 18 poi un'altra cometa veniva segnalata dal Broocks a Geneva.

« Di ambedue le comete do qui le posizioni, che ho potuto fare fino ad oggi coll'equatoriale di $0^m.25$ di apertura.

Cometa Perrine.

			Ascensione retta apparente	Declinazione apparente
1895 Nov.	18	$16^h\ 55^m\ 32^s$ (t. m. astr. R C R)	$13^h\ 48^m\ 2^s.75$ (9.629n)	$+\ 0^\circ 51'\ 26''.6$ (0.767)
»	20	17 5 17 »	13 52 39 .79 (9.621n)	— 0 13 19 .8 (0.770)
»	26	17 35 0 »	14 9 55 .29 (9.612n)	— 4 13 35 .3 (0.781)

Cometa Brooks.

1895 Nov.	26	16 40 13	9 35 2 .69 (8.721n)	— 4 48 41 .8 (0.806)
»	27	16 48 56	9 30 42 .90 (8.445n)	— 1 25 20 .7 (0.781)

« La cometa Broocks mi apparve come un ammasso nebuloso, senza nucleo distinto; soltanto con rinforzo di luce dissimetrica. Il moto a NW assai forte rileva la vicinanza dell'astro alla terra. Il primo saggio di elementi, che possediamo, lascia scorgere che l'astro diverrà fra breve circumpolare.

« La cometa Perrine è notabilmente più interessante perchè la distanza perielia è piccola, log q essendo circa 9.108. Dalla mia prima osservazione alla terza l'astro aveva guadagnato in isplendore; il nucleo stellare mi parve di 6^{ta} a 7^{ma} grandezza e la coda, orientata a NW, era ampia $20'$ o $30'$. Se gli elementi parabolici, calcolati a Kiel dal dott. Lamp sur un intervallo di 4 dì, non sono molto difettosi, l'astro deve teoricamente diventare una notabilissima cometa, dico teoricamente, perchè dello sviluppo delle parti d'una cometa nelle vicinanze del perielio nulla possiamo dire a priori.

« Sugli elementi di Lamp io ho calcolato il luogo dell'astro e l'intensità luminosa teorica per i tempi prossimi al passaggio al perielio.

			α (1895.0)	δ (1895.0)	Intensità luminosa detta *uno* quella del giorno della scoperta
1895 Dic.	11,5	Berlino	$15^h\ 19^m\ 8^s$	$-\ 18^\circ\ 42'$	11
»	15,5	»	15 57 24	— 24 38	23
»	19,5	»	17 6 24	— 30 26	64
»	23,5	»	18 20 48	— 30 28	201
»	25,5	»	18 51 52	— 25 26	141
»	27,5	»	19 6 19	— 19 56	64
»	29,5	»	19 13 36	— 15 20	33
»	33,5	»	19 21 21	— 8 18	

« Il 16 Dic. (t. civile) la cometa leva verso $6^h\ 11^m$ am tm MEC.

« La cometa deve dunque vedersi ad occhio nudo all'alba e ad est fino al 17 o 18 Dicembre; poi è immersa negli splendori del sole, e le ricerche spettano soltanto agli astronomi. Il 29 Dicembre la cometa è già astro serotino tramontando mezz'ora dopo il sole. Se l'astro avrà preso uno sviluppo delle sue parti dopo il passaggio al perielio, potrà essere ornamento alla sera del cielo occidentale nella prima quindicina di gennaio, ma la riserva in tale argomento non è mai troppa, anche perchè gli elementi primi dell'orbita potrebbero essere ben erronei, specialmente in log q da cui in gran parte dipende lo sviluppo futuro ».

Chimica. — *Sopra alcuni fatti relativi all'argo* (1). Nota preliminare del Corrispondente R. Nasini e di F. Anderlini.

« Da più mesi abbiamo intrapreso uno studio estesissimo delle diverse emanazioni terrestri, principalmente di quelle ricche in azoto, allo scopo di cercare se in esse era contenuto, e in quali proporzioni, il nuovo gas argo, e

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Padova.

naturalmente abbiamo innanzi tutto tentato di isolare l'argo dell'aria. Ora costantemente abbiamo notato il fatto che il residuo gassoso che non veniva assorbito dal magnesio, o che non si combinava coll'ossigeno per azione della scintilla, o era del tutto trascurabile, o era assai minore di quello che, secondo le esperienze di Lord Rayleigh e del prof. Ramsay, avrebbe dovuto essere. Di più ci è accaduto di osservare che un dato gas, che sembrava non esser più assorbito dal magnesio, seguitava invece ad essere assorbito, e in quantità notevole, se il magnesio veniva rinnovato. Il magnesio fu sempre scaldato a elevata temperatura nel vuoto prima di adoperarlo per le esperienze definitive: la temperatura a cui si effettuava l'assorbimento era vicina a quella di fusione del vetro meno fusibile: ordinariamente si operava a pressioni di poco diverse da quella atmosferica: cercammo anche nelle esperienze preliminari di adoperare sempre mercurio invece di acqua; ad ogni modo l'acqua adoperata era a ritenersi, dentro i limiti del possibile, satura di argo.

« Esperienze con tubi di Geissler a elettrodi di magnesio ci hanno mostrato che se il gas che non sembrava più essere assorbito dal magnesio nè combinarsi più coll'ossigeno, dava ancora lo spettro scannellato dell'azoto, questo poi spariva e si vedeva in tutta la sua nettezza il magnifico spettro dell'argo, colle caratteristiche righe rosse: ma dopo un tempo più o meno lungo scompariva anche lo spettro dell'argo e si vedeva di nuovo quello dell'azoto: finalmente anche esso spariva e la scarica non passava più. Se anche il gas adoperato non presentava in principio lo spettro dell'azoto, ma subito quello dell'argo, il fenomeno più importante si manifestava sempre; cioè sparizione dello spettro dell' argo e comparsa di quello dell' azoto. Abbiamo adoperato dei tubi di Geissler di forma comune ed altri doppî immaginati da uno di noi (Anderlini), ma il resultato è sempre stato identico. Il riempimento dei tubi col gas primitivo fu fatto alla pressione di 3-5 mm. seguendo tutte le precauzioni necessarie, come verrà a suo tempo ampiamente descritto.

« Da questi fatti sembrerebbe resultare con evidenza che l' argo può essere assorbito dal magnesio non solo nei tubi di Geissler, come in questo frattempo è stato constatato pure dal Troost e dall'Ouvrard, ma anche in altre condizioni, per sola azione del calore. La scomparsa dello spettro dell'argo e la comparsa o la ricomparsa di quello dell'azoto suggerirebbero delle conclusioni molto importanti e assai facili a trarsi sulla natura del nuovo gas; ma per ora ci basta di avere esposto i fatti ed attendiamo di aver eseguito altre esperienze che pur troppo sono assai lunghe, difficili e costose ».

Morfologia. — *Sulla morfologia del tarso dei Mammiferi.* Nota del Corrispondente Carlo Emery.

« Pubblicando nel giornale fondato dal prof. Todaro (che può dirsi, per questo, benemerito della scienza italiana) i risultati delle mie ricerche sulla

morfologia dello scheletro dei membri [1], ho lasciato in disparte talune questioni relative alle estremità posteriori dei Mammiferi, a risolvere le quali non avevo ancora pututo raccogliere copia sufficiente di osservazioni. Nuove ricerche, fatte su varie specie, e principalmente su piccoli da marsupio del *Didelphys aurita* m'inducono a formolare oggi alcune conclusioni preliminari.

« Se si confrontano serie di sezioni più o meno parallele al piano del membro, in stadî abbastanza giovani di Mammiferi, non è possibile non essere colpiti dal fatto che, mentre il calcagno si appoggia all'estremità della fibula, e l'astragalo s'incunea fra le due cartilagini corrispondenti alle ossa della gamba, l'estremità della tibia rimane discosta dalle cartilagini del tarso, lasciando fra tibia, astragalo e navicolare una insenatura, occupata da accenni embrionali che daranno origine a varie formazioni ligamentose. Questa disposizione desta l'impressione che, nel tarso dei Mammiferi, non sia rappresentato quel pezzo che è continuazione della tibia, nel tarso tipico degli Stapediferi, cioè il tibiale, ossia il probasale della mia nomenclatura [2]. L'astragalo dovrebbe perciò essere considerato come un intermedio (mesobasipodio), il calcagno come un fibulare (mesobasale), congiunto probabilmente ad un omologo del pisiforme (metabasale). Devo pertanto riconoscere che mi mancano finora prove sicure dell'esistenza di quest'ultimo elemento. Come si vede, io vengo così a confermare le vedute di Leboucq [3] che avevo provvisoriamente accettate come le più verosimili, nel mio lavoro citato. La posizione della arteria perforante del mesopodio tra l'astragalo e il calcagno (già riconosciuta dal Leboucq) non lascia dubbio sull'esistenza del mesobasipodio nell'astragalo e del mesobasale nel calcagno. Anche la posizione del navicolare rispetto all'astragalo e ai cuneiformi, che rimane invariata, fin dalla prima formazione di queste parti, è quella tipica dei centrobasali. In un preparato di uno dei miei più giovani *Didelphys* (lungh. dal vertice alla base della coda 12 mm.), scorgo, nella disposizione delle cellule cartilaginee, una traccia della duplicità del navicolare, di cui la porzione mediale (centrale tibiale) porta i due primi tarsali, la parte laterale (centrale fibulare), più piccola dell'altra, porta il tarsale 3°. Queste relazioni dei due elementi centrali corrispondono perfettamente a quelle espresse nel mio schema del Chiropterigio.

« Resta ancora a vedere se nulla rimanga del probasale, apparentemente assente nei Mammiferi, e quale sia il significato morfologico di quei piccoli pezzi ossei o cartilaginei che si riscontrano, in molte forme, al margine me-

[1] *Studi sulla morfologia dei membri degli Anfibi e sulla filogenia del Chiropterigio,* in: Ricerche labor. anat. Roma ecc. Vol. IV, p. 5-35, t. 1-2, 1894.

[2] L. c., p. 25.

[3] *Sur la morphologie du carpe et du tarse.* in: Anat. Anzeiger, 1 Bd. 1886, p. 17-21.

diale del tarso e furono considerate ripetutamente come rudimento di un dito scomparso, cioè del prealluce. Oggi quasi nessuno ammette più che i pezzi sopranumerari del margine del tarso siano rappresentanti di un vero raggio scheletrico ridotto. Prevale invece (secondo me a torto) l'opinione sostenuta dal Gegenbaur e convalidata principalmente dai lavori del Tornier [1] che questi siano il risultato di ossificazione o condrificazione di ligamenti (lig. calcaneo navicolare mediale; lig. tibio astragaleo anteriore) e di tendini (m. tibiale posteriore; m. abduttore dell'alluce). Il Tornier fa rilevare la posizione varia dei singoli pezzi, e non volendo ammettere che il medesimo elemento dello scheletro possa occupare diverse posizioni nelle singole forme animali, viene a stabilire l'esistenza di quattro diversi elementi scheletrici nei ligamenti e di un quinto nel tendine dell'abduttore dell'alluce. Quei diversi pezzi, ai quali viene attribuito il valore di sesamoidi, verrebbero, nei singoli casi, a fondersi fra loro, o pure col navicolare, o con l'endocuneiforme; così si spiega il fatto che non si trovarono mai più di due pezzi sopranumerari liberi nel medesimo tarso. Il metodo di ricerca seguito dall'autore, e fondato esclusivamente sulla comparazione di forme a completo sviluppo ci dà ragione dei suoi risultati, i quali avrebbero bisogno di essere controllati da opportune ricerche ontogenetiche; infatti sarebbe pure ammissibile che una data sporgenza di un osso fosse, in un caso, dovuta al semplice accrescimento di quell'osso, in un altro alla unione di esso con altri elementi scheletrici in origine indipendenti; o pure che certi elementi subissero degli spostamenti durante l'ontogenesi, in seguito allo accrescimento ineguale delle parti con le quali si trovano in relazione.

« Bisogna perciò distinguere, nel lavoro del Tornier; i fatti, che ritengo esattamente osservati; la teoria, che credo in parte erronea. Questa teoria si può formolare in breve, dicendo che, secondo il Tornier, i tendini e ligamenti sono primari, rispetto alla formazione secondaria dei sesamoidi che si sviluppano in essi. Ed in questo mi trovo con lui in contradizione.

« La comparazione del piede con la mano mostra chiaramente che quel pezzo sopranumerario del tarso che trovasi in relazione col muscolo abduttore dell'alluce corrisponde al cosidetto « sesamoide radiale » della mano, all'osso falciforme della Talpa. Se si ammette che quest'osso sia il carpale del prepollice (prosipattinale), bisognerà dare lo stesso valore al pezzo omologo nel piede. E questo è il più frequente e diffuso degli elementi sopranumerari del margine tibiale.

« Il significato dell'altro elemento sopranumerario (o degli altri, se si ammetta che ve ne possa essere più d'uno) è meno agevole a stabilire. La

[1] *Ueber den Säugethier-Praehallux. Ein dritter Beitrag zun Phylogenese des Säugethierfusses,* in: Arch. Naturg. 57 Jahg. p. 113-204, t. 7.

sua posizione nel ligamento tibio-astragaleo anteriore, o nella porzione distale del lig. calcaneo-navicolare mediale, cioè in un tratto che corrisponde al posto del probasale assente, come ancora le sue relazioni col prosipattinale, e in alcuni Rosicanti (*Aulacodus* e *Coelogenys*, secondo Tornier) col tarsale 1°., simili a quelle del radiale del carpo, fanno pensare che possa essere un rudimento del tibiale. E così credo che sia; però questa proposizione abbisogna di alcuni schiarimenti.

« Secondo il mio schema, il probasale si estende tipicamente tra il probasipodio e il prosipattinale. Questo tratto è occupato, nel piede dei miei più piccoli *Didelphys*, da un accenno indifferente in cui vengono a formarsi, più tardi, diversi ligamenti. A parer mio, questo accenno rappresenta il probasale; però, nel *Didelphys* e in molti altri, non condrifica più; in altri, produce solo un piccolo nucleo cartilagineo (forse anche più d'uno) il quale si forma in luogo determinato da condizioni meccaniche delle funzioni del piede. Da ciò risulta la varietà della conformazione e della posizione del pezzo, o dei pezzi che rappresentano parte del probasale.

« Siffatti pezzi potrebbero dunque essere residui derivanti direttamente da una condizione primitiva, in cui esisteva ancora un probasale del piede. Ma potrebbero ancora essere nuove formazioni, le quali, avendo per punto di partenza un accenno embrionale derivato dal probasale cartilagineo ed osseo degli Urodeli, rappresentano la palingenesi di un elemento scomparso.

« Secondo quest'ultima ipotesi, la loro formazione sarebbe comparabile al ritorno per atavismo di un elemento scomparso fin da moltissime generazioni; p. es. di un dito in taluni casi d'iperdattilia (il maggior numero delle dita sopranumerarie non sono ataviche), come quello da me descritto [1] nella mano di un embrione di Porco. Anche in questo caso, il pollice ricomparso, se per i suoi rapporti e la sua origine nella ontogenesi, deve dirsi omologo al pollice dei Mammiferi pentadattili, pure presenta dei caratteri proprî.

« In quanto al significato del pezzo sopranumerario del tarso ora in questione, se pure il dilemma posto poc'anzi si risolverà nel senso della seconda ipotesi (per la qual cosa sarà d'uopo attendere maggior luce da nuovi studi), bisognerà riguardarlo come omologo al tibiale del tarso, perchè ha per punto di partenza nell'ontogenesi lo stesso accenno indifferente, che più non diventa cartilagineo, ma che, nella filogenesi, derivò da un elemento dello scheletro tipico del Chiropterigio.

[1] *Studi sulla morfologia dei membri dei Mammiferi* in: Mem. Accad. sc. Bologna, (5) tomo 2, 1892, p. 673-688, 2 tav.

« Ho riscontrato costantemente nei miei più piccoli *Didelphys* l'esistenza di un tarsale 5, distinto dal tarsale 4 con cui più tardi si fonde, per costituire con esso il cuboide. Tra i Mammiferi non furono osservati, per quanto io sappia, 5 tarsali distinti; 5 carpali furono descritti dal Kükenthal nella mano di alcuni Cetacei ».

Matematica. — *Sopra la corrispondenza polare fra coniche inviluppo e coniche luogo stabilita da una quartica piana.* Nota di E. Ciani, presentata dal Corrispondente Bertini.

« La Nota presente ha per iscopo di mostrare come molte delle più conosciute curve invariantive di una quartica piana, provengono dalla nota corrispondenza polare fra coniche inviluppo e coniche luogo che la quartica medesima stabilisce e come per mezzo della stessa corrispondenza tali curve si possano organizzare in modo semplice e naturale. Fra di esse sono il covariante S e il contravariante ψ di Clebsch [1] di cui ritrovo qui le caratteristiche pluckeriane con procedimenti molto più rapidi di quelli impiegati per lo stesso scopo nella mia Memoria antecedente su tale argomento [2]. Le considerazioni di cui mi valgo sono in gran parte prese dalla geometria degli iperspazi e in particolare si riferiscono alla superficie di Veronese, alla varietà costituita dai suoi piani tangenti e alle varietà duali d' entrambi, che indico rispettivamente coi simboli F_2^4, M_4^3, Φ_2^4, $\boldsymbol{M}_4^3$ già impiegati da Veronese [3] e da Segre [4].

« 1. Sia la quartica $a_x^4 = b_x^4 = c_x^4 = \cdots$ del piano π. Presa una qualunque conica inviluppo $\mu_u^2 = 0$ di π, la conica luogo $a_\mu^2\, a_x^2 = 0$ è la polare della prima e la prima lo è della seconda. Se la conica $\mu_u^2 = 0$ consiste di una coppia di punti, ovvero di un punto doppio, la conica polare diviene la conica polare mista, o la conica polare pura della coppia di punti, o del punto. Questa corrispondenza fra coniche inviluppo e coniche luogo e la sua inversa si rappresentano molto opportunamente nell' S_5, di cui i punti e gli iperpiani sieno rispettivamente le coniche inviluppo e le coniche luogo di π,

(1) Clebsch, *Ueber Curven vierter ordnung.* Crelle, Bd. 59.

(2) *Sopra due curve invariantive di una quartica piana.* Ann. di Mat. pura e applicata, serie II, tomo XX, 1892.

(3) Veronese, *La superficie omaloide normale a due dimensioni e del 4° ordine dello spazio a cinque dimensioni.* Mem. Acc. Lincei, serie III, vol XIX.

(4) Segre, *Sulla geometria delle coniche di un piano.* Atti Accad. delle Scienze di Torino, 1885.

mediante la polarità rispetto a una certa quadrica Q_4^2, che chiameremo fondamentale, di cui l'equazione è:

$$Q_4^2 = a_{1111}\,y_1^2 + a_{2222}\,y_2^2 + a_{3333}\,y_3^2 + a_{1212}\,y_4^2 + a_{1313}\,y_5^2 + a_{2323}\,y_6^2 +$$
$$+ 2a_{1122}\,y_1\,y_2 + 2a_{1133}\,y_1\,y_3 + 2a_{1112}\,y_1\,y_4 + 2a_{1113}\,y_1\,y_5 + 2a_{1123}\,y_1\,y_6 +$$
$$+ 2a_{2233}\,y_2\,y_3 + 2a_{2212}\,y_2\,y_4 + 2a_{2213}\,y_2\,y_5 + 2a_{2223}\,y_2\,y_6 + 2a_{3312}\,y_3\,y_4 +$$
$$+ 2a_{3313}\,y_3\,y_5 + 2a_{3323}\,y_3\,y_6 + 2a_{1213}\,y_4\,y_5 + 2a_{1223}\,y_4\,y_6 + 2a_{1323}\,y^5\,y_6 = 0$$

e la quale gode la proprietà di essere apolare alla Φ_2^4 (1). Il discriminante D della quadrica fondamentale è il noto invariante di sesto grado della quartica; così possiamo intanto affermare che:

« *La corrispondenza polare fra coniche inviluppo e coniche luogo e la sua inversa sono biunivoche senza eccezione finchè* $D \neq 0$ ».

« *Le corrispondenze polari stabilite da tutte le quartiche di* π *per cui* D *ha la stessa caratteristica sono proiettivamente identiche* ».

« 2. Nella corrispondenza inversa, data la conica luogo $m_x^2 = 0$, si scrive immediatamente l'equazione della conica inviluppo polare sotto la forma:

$$A_m^2\,\mathcal{A}_u^2 = 0$$

ove i simboli A e $\mathcal{A}$ (equivalenti) sono legati ai coefficienti effettivi dalle relazioni:

$$A_i\,A_r\,\mathcal{A}_j\,\mathcal{A}_s = \frac{1}{\alpha_{ir}}\cdot\frac{1}{\alpha_{js}}\,A_{ir,js}$$

essendo (2)

$$A_{ir,js} = A_{ri,js} = A_{ir,sj} = A_{ri,sj} = A_{js,ir} = A_{sj,ir} = A_{sj,ri} = A_{js,ri}$$

il complemento algebrico di a_{irjs} in D e avvertendo che tanto α_{ir}, quanto α_{js} rappresentano 1, o 2 a seconda che gl'indici che affettano il simbolo α sono uguali o disuguali.

« Quando la conica data si sciude in un paio di rette v, w l'equazione della conica polare diviene:

$$A_v\,A_w\,\mathcal{A}_u^2 = 0$$

Se le rette v, w coincidono essa è infine

$$A_v^2\,\mathcal{A}_u^2 = 0$$

valendo tutte le circostanze precedenti nel passaggio dai coefficienti simbolici agli effettivi con la sola differenza che adesso α_{ir} è sempre uguale a uno.

(1) Segre, *Alcune idee di Ettore Caporali intorno alle quartiche piane*. Annali di Mat. serie II, tomo. XX. — I simboli della equazione sopra scritta di Q^2_4 divengono quelli di Segre, ponendo:

$$y_1 = x_{11}\,,\; y_2 = x_{22}\,,\; y_3 = x_{33}\,,\; y_4 = 2x_{12}\,,\; y_5 = 2x_{13}\,,\; y_6 = 2x_{23}\,.$$

(2) Clebsch, loc. cit.

« 3. La polarità così stabilita mette in rilievo una certa corrispondenza fra le più note curve invariantive della quartica, mediante la quale esse si organizzano a due a due così che le caratteristiche pluckeriane duali di curve corrispondenti vengono a essere uguali. Cominciamo dalla polohessiana di un punto P ([1]) (hessiana della cubica polare di P). La polohessiana di P può considerarsi come il luogo di un punto variabile R tale che la coppia di punti PR abbia per conica polare una coppia di rette. Nel nostro S_5 l'obbiettiva della polohessiana di P si ottiene evidentemente prendendo l'S_2 di seconda specie tangente alla F_4^2 nel punto che è l'obbiettivo di P e tagliando con questo piano la polare reciproca di M_4^3 rispetto alla Q_2^4: la sezione corrisponde omograficamente ([2]) alla polohessiana di P. Eseguiamo la costruzione duale in S_5. Dovremo prendere la Φ_2^4, uno dei suoi iperpiani I, l' S_2 che contiene la conica di contatto dell'iperpiano I e costruire la sviluppabile inviluppo degli iperpiani che passano per l' S_2 nominato e appartengono alla polare reciproca di M_4^3 rispetto a Q_4^2. Questa sviluppabile sarà rappresentata dall' inviluppo di da quella retta variabile la quale associata con una retta fissa (la immagine di I), individua una conica che ha per polare una coppia di punti. Ebbene quest'inviluppo non è altro che la K_r di Caporali ([1]). Mediante quindi la dualità che esiste in S_5 fra le obbiettive della polohessiana e la K_r di una retta, è facile passare da proprietà della prima a proprietà della seconda. Così p. es. ai teoremi: la polohessiana è una curva del 3° ordine; se la polohessiana di P passa per P′ viceversa la polohessiana di P′ passa per P, fanno riscontro quest' altri: la K_r è una curva di 3ª classe; se la K_r di r tocca r' viceversa la $K_{r'}$ di r' tocca r ([1]).

« 4. L'hessiana della quartica può pensarsi come il luogo di un punto, il quale contato due volte, costituisce una conica la cui polare è una coppia di rette. La sua obbiettiva in S_5 è la sezione di F_2^4 con la polare reciproca di M_4^3 rispetto a Q_4^2 ([3]). La sviluppabile duale è l'inviluppo dagli iperpiani comuni a Φ_2^4 e alla polare reciproca di M_4^3, e la sua immagine è evidentemente l'inviluppo di una retta la quale contata due volte ha per conica polare una coppia di punti, cioè la ψ di Clebsch. Segue che l'ordine dell'hessiana è uguale alla classe di ψ, che il genere della prima è uguale a quello della seconda, che ψ è privo di bitangenti perchè l'hessiana non ha punti doppi, che insomma può enunciarsi il teorema:

([1]) Caporali, *Sopra le quartiche piane.* Volume delle sue Memorie.

([2]) Segre, *Sulla geometria delle coniche di un piano,* loc. cit.

([3]) Di qui si ritroverebbe l'ordine dell'hessiana. Perchè tale sezione in S_5 è di 12° ordine, per cui ha 12 punti comuni con la C_1^4 sezione di un iperpiano con la F_2^4, ma la C_1^4 si rappresenta in una conica: dunque l'ordine cercato è 6.

« *L'hessiana e il contravariante ψ di Clebsch hanno le caratteristiche pluckeriane duali uguali* » [1].

« 5. Il medesimo processo mediante il quale si trova l'equazione della polohessiana di un punto e da essa quella della hessiana, serve per trovare l'equazione della K_r e da essa quella di ψ. Per la polohessiana di un punto y basta esprimere che la conica polare della coppia costituita da y e da un punto variabile x è una coppia di rette. Si trova come è noto:

$$a_y\, b_y\, c_y\, a_x\, b_x\, c_x\, (abc)^2 = 0$$

« L'hessiana può pensarsi come il luogo di un punto che giace sulla propria polohessiana. Quindi la precedente per $y = x$ dà l'equazione della hessiana. Analogamente, esprimendo che la conica polare della coppia di rette uv, delle quali v è fissa e u variabile, si spezza in due punti, troveremo la equazione della K_r

$$K_r = A_v\, B_v\, C_v\, A_u\, B_u\, C_u\, (ABC)^2 = 0$$

e così pure riguardando la ψ come l'inviluppo di una retta tangente alla propria K_r ne troveremo l'equazione ponendo nella precedente $u = v$, onde

$$\psi = A_u^2\, B_u^2\, C_u^2\, (ABC)^2 = 0$$

nelle quali valgono per i simboli A, A; B, B; C, C le avvertenze fatte alla fine del n. 2 per i simboli A, A [2].

« 6. Riprendiamo la curva e la sviluppabile in S_5 le quali sono le obbiettive di una polohessiana e di una K_r. Le loro polari reciproche rispetto a Q_4^2 saranno rispettivamente rappresentate in π dall'inviluppo costituito da tutte quelle coppie di rette, le cui coniche polari sono coppie di punti aventi tutte un punto fisso comune e dal luogo di quelle coppie di punti le cui coniche polari sono coppie di rette dotate di una retta fissa comune. L'inviluppo è la polocayleyana del punto (cayleyana della cubica polare); il luogo

(1) Ciani, loc. cit.

(2) L'equazione di ψ si trova anche in Clebsch, loc. cit., ma non sotto forma simbolica. Essa è ottenuta nel § 4 della sua citata Memoria. — La riduzione fatta al § 5 non è giusta, come già ebbi a osservare nel n° 2 del mio lavoro. Al qual proposito anzi è da notarsi come i determinati della forma:

$$\begin{vmatrix} A_{ik,\,11} & A_{i'k',\,12} & A_{i''k'',\,13} \\ A_{ik,\,21} & A_{i'k',\,22} & A_{i''k'',\,23} \\ A_{ik,\,31} & A_{i'k',\,23} & A_{i''k'',\,33} \end{vmatrix}$$

che compariscono nella equazione suddetta, non solamente per *qualche* valore di i, k, i', k', i'', k'' non possono essere minori del reciproco di D, ma per *nessun* valore dei sunnominati indici ciò può accadere: dunque il *distacco* del fattore D invocato da Clebsch non avviene per *nessun* termine della equazione medesima.

è la G_r della retta (cfr. Caporali). Queste due curve sono rappresentate contemporaneamente dalla forma mista

$$(abu)\,(acu)\,(bcu)\,(abc)\,a_x\,b_x\,c_x = 0$$

a seconda che vi si faccia $x = \text{cost}$, ovvero $u = \text{cost}$ (1).

« 7. Analogamente, costruendo in S_5 le polari reciproche rispetto a Q_4^2 di quella curva e di quella sviluppabile rappresentate in π dall'hessiana e dall'inviluppo ψ troveremo un'altra sviluppabile (σ) e un'altra curva (S) le quali saranno rappresentate in π rispettivamente dall'inviluppo σ delle coppie di rette che sono coniche polari dei punti dell'hessiana e dal luogo S di quelle coppie di punti le cui coniche polari sono le tangenti di ψ (ognuna contata due volte): quest'ultimo è il covariante S di Clebsch. La corrispondenza fra (σ) e (S) è biunivoca ma non fra (σ) e σ nè fra (S) e S perchè gl'iperpiani di (σ) si specchiano in coppie di tangenti di σ e i punti di (S) in coppie di punti di S non dotate di elementi fissi. Non si può quindi inferirne che S e σ abbiano le caratteristiche pluckeriane duali uguali. Infatti è noto che S è di 4° ordine: σ è di 12ª classe (2) e non riducibile certamente a una curva tripla di 4ª classe, altrimenti essa, avendo a comune con l'inviluppo equianarmonico le 24 tangenti di flesso della quartica, dovrebbe coincidere con l'inviluppo equianarmonico medesimo il che, si vede facilmente, non può avvenire per una quartica generica (3).

« 8. Cade qui opportuno il dimostrare con molta semplicità che il covariante S è privo di nodi e di cuspidi (cfr. mia prima Memoria). Per questo osserveremo prima come la sola considerazione della nostra polarità in S_5 ci dice che presa una conica luogo L, di essa una conica armonica, di questa la polare; la conica polare di L è armonica a quest'ultima. Nel caso particolare che la conica data sia una retta doppia, ne segue il teorema:

« *I quattro triangoli polohessiani dei 4 punti nei quali una retta taglia il covariante* S, *sono circoscritti alla conica polare della retta* ».

« I loro lati costituiscono le 12 tangenti comuni a ψ e a tale conica. Ammettiamo ora che esista un punto doppio per S. Ciò significa che qualunque retta per quel punto taglia S in tre punti distinti e quindi i 4 triangoli precedenti sono ridotti a tre, onde tutte quelle rette, ciascuna pensata come doppia, avrebbero una medesima conica polare: cioè quella che tocca ψ nei tre punti in cui ψ è toccato dal triangolo polohessiano del punto doppio

(1) Maisano, *Sistemi completi dei primi cinque gradi della forma ternaria biquadratica* ecc. Giornale di Napoli, vol. XIX.

(2) Cremona, *Curve piane*, n° 128.

(3) Per accertarsene si prenda per un vertice del triangolo fondamentale un punto dell'hessiana e per lato opposto una delle due rette in cui si spezza la conica polare del punto preso. — Dopo, si tagli con questa retta la quartica, e si vedrà che la condizione equianarmonica non è genericamente adempiuta.

supposto (e qui si noti come ψ, non avendo tangenti multiple, il suddetto triangolo deve toccare ψ in tre soli punti, uno sopra ciascun lato). Ora tutto questo è impossibile perchè la polarità in discorso è corrispondenza biunivoca finchè $D \neq 0$, ossia finchè la quartica è generale.

« Il ragionamento precedente potrebbe far difetto per quei punti di S che sono cuspidi della Steineriana, giacchè i loro triangoli polohessiani hanno ciascuno due lati coincidenti, ma se si pensa che le 24 cuspidi della Steineriana riguardate come punti semplici di S esauriscono tutte le intersezioni di S con la Steineriana medesima, si vede che il dubbio anche in questo caso si toglie. Dunque S non ha nè nodi, nè cuspidi. E a proposito del covariante S e del contravariante ψ noto qui una inesattezza sfuggitami ai due §[i] ultimi della mia già citata Memoria. E consiste in questa: « ogni punto di ψ gode la proprietà che la sua polohessiana tocca S » ciò è indubbio. Ma viceversa non può dirsi che ψ esaurisca tutto il luogo dei punti che godono tale proprietà (come nei due §[i] suddetti è inesattamente affermato). Tal luogo è evidentemente costituito da ψ e da S medesimo. Dunque quando si esprime la condizione di contatto di una polohessiana in S annullando il relativo tact- invariante si troverà l'equazione di ψ e quella di S contata un certo numero di volte (sei volte).

« 9. È noto che il covariante S può anche pensarsi come il luogo di un punto la cui polohessiana è un triangolo (¹). Una tal definizione riguarda non più coppie di punti di S, ma i suoi singoli punti. Quando voglia farsi altrettanto per σ si può dire evidentemente che « *essa è l'inviluppo di una retta la cui* G_r *ha un punto doppio* ». Approfittando di questa definizione l'equazione si scrive facilmente perchè l'equazione di G_r è nota (§ 6).

« 10. Riprendiamo il covariante S, il contravariante σ e le loro obbiettive iperspaziali (S) e (σ). Se (P) è un punto di (S) poichè (P) è sopra M_4^3, ne viene che per (P) si possono tirare due piani di 2ª specie di

(¹) Un punto P di S associato con uno variabile sopra un lato del triangolo polohessiano di P, dà luogo a una schiera di coppie di punti tali che le loro coniche polari sono coppie di rette involutorie di un fascio di cui il centro è il vertice opposto del triangolo polohessiano. — In S_5 gli obbiettivi di quella schiera e di quel fascio sono una retta e un S_3 polari reciproci rispetto a Q_4^2 e contenuti rispettivamente nell'M_4^3 e nella M_4^3. — Variando il punto P sopra S si hanno due superficie (o meglio un luogo di S_1 e un luogo di S_3) polari reciproche l'una dell'altra, le quali non sono forse prive di qualche interesse. Così ad esempio quella (rigata) che giace in M_4^3 è costituita da infiniti triangoli di cui i vertici costituiscono la obbiettiva del covariante S. — L'ordine della superficie è 36 e lo si determina facilmente tagliandola con un S_3 rappresentato in π da tutte le coniche tangenti a due rette: l'obbiettiva del covariante S è quadrupla per la superficie medesima, cioè in un punto di quella obbiettiva hanno un vertice comune due triangoli: il piano di ciascuno di quei triangoli è un S_2 di seconda specie, ogni altro S_2 di seconda specie è spazio 12-secante. La sezione iperplanare è di 36° ordine e possiede 12 punti quadrupli (perchè l'obbiettiva di S è di 12° ordine). — Se però l'iperpiano secante è di $S_2{}^4$, la sezione si compone di 4 triangoli e di una curva residua di 24° ordine ecc.

cui i punti di contatto (U) e (V) con F^4_2 sono rappresentati dai due punti U e V di S che sono obbiettivamente dati da (P). Quindi l'iperpiano di Φ^4_2 che tocca F^4_2 lungo la conica passante per (U) (V) è rappresentato in π dalla retta UV. La costruzione duale in S_5 conduce a questo. Sia (p) un iperpiano generico di (σ) esso taglia F^4_2 in due coniche (u) (v) che sono rappresentate in π da quelle rette u, v di σ che costituiscono la coppia di cui l'obbiettiva è (p). Quindi il punto $(u)(v)$ di F^4_2 è rappresentato dal punto uv di π e imitando il ragionamento del § 4 potremo concluderne che:

« *Hanno caratteristiche pluckeriane duali uguali la Steineriana e l'inviluppo delle rette che congiungono punti corrispondenti del covariante* S ».

« Cioè quest'inviluppo è di 12ª classe, ha 21 bitangenti, 24 flessi, è di ordine 18, ha 84 punti doppî, 42 cuspidi.

« Si vedrebbe anche che le 21 bitangenti sono costituite da quelle 21 rette che si staccano dalle cubiche polari dei 21 punti doppî della Steineriana ».

Meccanica — *Sul moto di un sistema nel quale sussistono moti interni variabili.* Nota di G. Peano, presentata dal Socio Beltrami.

« In un articolo avente questo stesso titolo, e pubblicato nei Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, il 15 settembre scorso, il prof. Volterra conferma con i suoi calcoli uno dei risultati cui pervenni nelle mie due Note *Sullo spostamento del polo terrestre*, pubblicate negli Atti della R. Accademia di Torino, in data 5 maggio e 23 giugno. E siccome la questione del moto del polo è ora assai interessante, credo utile l'esporre in poche parole i risultati cui pervenni, e che si possono ritrovare per ogni via.

« È noto che circa un anno fa (29 ottobre e 5 novembre 94), nell'Accademia delle scienze di Parigi fu discussa la comune affermazione che un gatto, comunque abbandonato, cade sempre sulle sue zampe. E se per un istante si ritenne ciò contrario al principio delle aree, si riconobbe poi facilmente che questo principio, rettamente inteso, spiega completamente il fenomeno. Io pure mi occupai brevemente della questione nella Rivista di Matematica (gennaio 1895). E precisamente un essere vivente può cambiare a suo arbitrio il proprio orientamento col far descrivere un ciclo chiuso ad una parte del suo corpo (la quale, nel gatto, ritengo sia la coda).

« Discutendosi in seguito la questione dello spostamento del polo terrestre, prodotto da moti delle parti della terra, quali le correnti marine, feci notare a qualche persona l'identità delle due questioni, poichè invece del gatto e della sua coda si può parlare della terra e del suo mare. Ma non essendomi prestata fede, pubblicai la mia prima Nota (5 maggio).

« In questa dapprima, introducendo il calcolo geometrico, metto alcuni noti principî di meccanica sotto forma nuova, e che io ritengo più intuitiva. In seguito considero un corpo, che diremo *terra*, composta di una parte rigida (*continente*), e d'una mobile qualunque (*mare*). Faccio astrazione dalle forze esterne. Allora il principio delle aree, o delle quantità di moto dice che

(Quantità di moto del continente) + (Quantità di moto del mare) = costante,

ove le quantità di moto sono considerate come forme geometriche. Conoscendo la costante del secondo membro, e la quantità di moto del mare, deduco di qui quella del continente; e conoscendone gli elementi di inerzia, deduco la velocità d'un punto qualunque della terra, e quindi la velocità del polo.

« Onde riconoscere se le correnti quali noi vediamo sulla terra, possano produrre uno spostamento sensibile del polo, feci il calcolo numerico sulla corrente del Golfo (Gulfstream), e trovai che essa da sola imprimerebbe al polo la velocità di circa un metro all'anno [1]. Onde conchiudo che queste correnti possono produrre effetti non trascurabili. Non mancai però di notare che le correnti marine, regolarmente distribuite sulla terra, producono un effetto nullo.

« Sicchè il principio delle aree, convenientemente enunciato, contiene sotto forma finita ed a primo grado la velocità del polo. In questa questione non compaiono derivate seconde, nè accelerazioni, nè forze, ma sole quantità di moto. Si capisce senz'altro che la stessa equazione permetta, data la velocità del polo, di trovare la quantità di moto che la può produrre; il problema è sempre di primo grado. Quindi noi potremmo far muovere il polo a nostro arbitrio, se potessimo produrre convenienti correnti marine.

« Ma molti autori dicono esplicitamente che le correnti dell'intensità di quelle che noi vediamo, supposto il continente rigido, non possono produrre che piccoli spostamenti, oscillazioni, moti periodici del polo. I calcoli sono fatti trascurando dei termini che sono trascurabili solo quando si sappia già che questi spostamenti sono piccoli.

« Per decidere completamente siffatta questione, nella mia 2ª Nota (23 giugno) risolsi il problema: Data la quantità di moto del mare in funzione del tempo, trovare non solo la velocità del polo, ma bensì la sua posizione alla fine d'un tempo qualunque t. Trattai dapprima alcuni casi particolari in cui basta la matematica elementare. Fra questi trovasi il moto per cui un punto della terra passa dal polo all'equatore con moto equabile, descrivendo un meridiano, il quale è ottenuto componendo due moti rotatorî equabili. È questo il risultato che il prof. Volterra viene a confermare colla sua

[1] Sir William Thomson calcolò nel 1874 che i fenomeni meteorologici e marittimi possono produrre una variazione di latitudine di mezzo secondo (= 15 m.). Ma non pubblicò il modo con cui fece il calcolo. Vedasi ad es. l'*Annuaire du Bureau des longitudes*, a. 1895, B. 10.

ultima Memoria. Qualunque si sia poi quella funzione, ricondussi il problema ad altro noto, ed espressi la posizione del polo mediante una serie sempre convergente.

« Ora se la questione si può per questa via facilmente e completamente risolvere, la ragione per cui altri si imbattè in gravi difficoltà, credo dipenda dall'uso abituale di lunghe formole per indicare idee semplici.

« Così il prof. Volterra, nella sua Memoria *Sulla teoria dei moti del polo terrestre* (Atti Acc. Torino 3 febbraio 1895), comincia collo scrivere tre equazioni le quali, geometricamente intese, dicono che un certo vettore (indice della quantità di moto) è costante. Egli le deriva, le trasforma, e nel caso generale che ci interessa, giunge ad un solo integrale (ultima pagina della Memoria), che significa « La lunghezza di quel vettore è costante ».

« E chi non ama il termine *vettore*, elevando a quadrato e sommando le tre prime equazioni (2ª pagina), troverà l'integrale del prof. Volterra.

« Il medesimo autore nella sua Memoria *Sui moti periodici del polo terrestre* (id. 5 maggio 95) non tratta il problema generale; ma parte dal *presupposto che i moti del polo di rotazione siano decomponibili in moti armonici* (pag. 547); *ammette* in seguito che certe quantità siano piccolissime, cioè che il polo si sposti di pochissimo, e trascura più termini (pagina 550 e nota a pag. 551). Ad onta di queste limitazioni, il moto progressivo del polo, quale io trovai, non sarebbe del tutto sfuggito se l'autore a pag. 552, dopo aver diviso per una quantità che può esser nulla ($\lambda_n - \omega$), non avesse conchiuso. « Le formole precedenti perdono ogni significato quando sia $\lambda_n = \omega, \ldots$, dovrà dunque essere $\lambda_n \gtrless \omega$ ». Se invece si bada che $\int e^{iat}dt$ dà una funzione periodica per α diverso da zero, ma dà il termine secolare t per $\alpha = 0$, sarebbe in questo caso comparso il moto progressivo.

« Credo inutile aggiungere altro, poichè infine il prof. Volterra convenne nel mio risultato che « moti relativi comunque piccoli, agendo per un tempo sufficiente, possono spostare comunque il polo terrestre anche supposto il continente rigido ».

Matematica. — *Sulle irrazionalità da cui può dipendere la risoluzione di un'equazione algebrica $f(x\,y\,z) = 0$, mediante funzioni razionali di due parametri.* Nota di F. ENRIQUES, presentata dal Socio CREMONA.

Geodesia. — *Intorno alla effettiva determinazione della superficie di livello terrestre, entro regioni limitate.* Nota del prof. P. PIZZETTI, presentata dal Socio CREMONA.

Queste due Note saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Fisica. — *Ancora sulle leggi di propagazione della luce nei cristalli magnetici.* Nota di ALFONSO SELLA, presentata dal Socio BLASERNA.

In una Nota precedente [1] ho dedotta l'equazione della superficie delle velocità normali in cristalli magnetici, per cui gli assi principali dielettrici e magnetici sieno coincidenti e ne ho discusso alcune proprietà più salienti. Veniamo ora a trovare l'equazione della superficie d'onda di cui la superficie delle velocità normali è la podaria.

« Conservando le notazioni precedenti noi diremo che

$$mx + ny + pz - \omega = 0$$

rappresenterà un piano tangente alla superficie d'onda e ponendola sotto la forma

$$ux + vy + wz + 1 = 0 \tag{10}$$

avremo

$$u = -\frac{m}{\omega}, \quad v = -\frac{n}{\omega}, \quad w = -\frac{p}{\omega},$$

talchè l'equazione della superficie d'onda in coordinate di piani o Plückeriane u, v, w diverrà per la $(9a)$:

$$\frac{u^2}{\frac{M^2}{\varepsilon_1} - \frac{1}{\mu_1}} + \frac{v^2}{\frac{M^2}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\mu_2}} + \frac{w^2}{\frac{M^2}{\varepsilon_3} - \frac{1}{\mu_3}} = 0 \tag{11}$$

in cui

$$M^2 = \frac{u^2}{\mu_2 \mu_3} + \frac{v^2}{\mu_3 \mu_1} + \frac{w^2}{\mu_1 \mu_2}.$$

Alla (11) si può anche dare aggiungendo M^2 a destra ed a sinistra la seguente forma:

$$\frac{\frac{u^2}{\varepsilon_1 \mu_2 \mu_3}}{\frac{M^2}{\varepsilon_1} - \frac{1}{\mu_1}} + \frac{\frac{v^2}{\varepsilon_2 \mu_3 \mu_1}}{\frac{M^2}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\mu_2}} + \frac{\frac{w^2}{\varepsilon_3 \mu_1 \mu_2}}{\frac{M^2}{\varepsilon_3} - \frac{1}{\mu_3}} = 1\,. \tag{12}$$

« Per passare a coordinate cartesiane dovrò scrivere:

$$x = \lambda \frac{\partial f}{\partial u}, \quad y = \lambda \frac{\partial f}{\partial v}, \quad z = \lambda \frac{\partial f}{\partial w}$$

[1] Vedi pag. 237.

in cui f è il membro a sinistra della (11) ed eliminare λ, u, v, w fra queste tre relazioni, la (11) e la (10). Sarà così:

$$x = \lambda u \left(\frac{1}{\frac{M^2}{\varepsilon_1} - \frac{1}{\mu_1}} - \frac{R_1^2}{\mu_2 \mu_3} \right)$$

$$y = \lambda v \left(\frac{1}{\frac{M^2}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\mu_2}} - \frac{R_1^2}{\mu_3 \mu_1} \right) \tag{13}$$

$$z = \lambda w \left(\frac{1}{\frac{M^2}{\varepsilon_3} - \frac{1}{\mu_3}} - \frac{R_1^2}{\mu_1 \mu_2} \right)$$

in cui

$$R_1^2 = \frac{\frac{u^2}{\varepsilon_1}}{\left(\frac{M^2}{\varepsilon_1} - \frac{1}{\mu_1}\right)^2} + \frac{\frac{v^2}{\varepsilon_2}}{\left(\frac{M^2}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\mu_2}\right)^2} + \frac{\frac{w^2}{\varepsilon_3}}{\left(\frac{M^2}{\varepsilon_3} - \frac{1}{\mu_3}\right)^2}.$$

Col sistema di fattori u, v, w ottengo dalle (13) per la (10) e la (11)

$$\lambda = \frac{1}{R_1^2 \; M^2}. \tag{14}$$

« Ancora elevando a quadrato le (13) e poi col sistema di fattori $\mu_2 \mu_3$, $\mu_3 \mu_1$, $\mu_1 \mu_2$ trovo

$$\sigma^2 = x^2 \mu_2 \mu_3 + y^2 \mu_3 \mu_1 + z^2 \mu_1 \mu_2 = \lambda^2 (R_2^2 \, y_1 \, y_2 \, y_3 + R_2^4 \, M^2)$$

in cui

$$R_2^2 = \frac{\frac{u^2}{\mu_1}}{\left(\frac{M^2}{\varepsilon_1} - \frac{1}{\mu_1}\right)^2} + \frac{\frac{v^2}{\mu_2}}{\left(\frac{M^2}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\mu_2}\right)^2} + \frac{\frac{w^2}{\mu_3}}{\left(\frac{M^2}{\varepsilon_3} - \frac{1}{\mu_3}\right)^2}.$$

Ora è facile vedere che per la (11) $R_2^2 = R_1^2 \, M^2$ e quindi sarà tenendo presente la (14):

$$\sigma^2 = \frac{\mu_1 \mu_2 \mu_3}{R_1^2 \; M^2} + \frac{1}{M^2} \tag{15}$$

Finalmente dalle (13) col sistema di fattori $\dfrac{\frac{u}{\varepsilon_1}}{\frac{M^2}{\varepsilon_1} - \frac{1}{\mu_1}}$ ed analoghi si ha

per la (12):

$$\frac{\frac{ux}{\varepsilon_1}}{\frac{M^2}{\varepsilon_1}-\frac{1}{\mu_1}}+\frac{\frac{vy}{\varepsilon_2}}{\frac{M^2}{\varepsilon_2}-\frac{1}{\mu_2}}+\frac{\frac{wz}{\varepsilon_3}}{\frac{M^2}{\varepsilon_3}-\frac{1}{\mu_3}}=0 \tag{16}$$

« Sostituendo il valore di λ dato dalla (14) nella prima delle (13), si ottiene grazie alla (15):

$$x=\frac{u}{\frac{M^2}{\varepsilon_1}-\frac{1}{\mu_1}}\left(\frac{1}{R_1^2 M^2}-\frac{1}{\varepsilon_1\mu_2\mu_3}+\frac{1}{M^2\mu_1\mu_2\mu_3}\right)$$

$$=\frac{u}{\mu_1\mu_2\mu_3\left(\frac{M^2}{\varepsilon_1}-\frac{1}{\mu_1}\right)}\left(\sigma^2-\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}\right)$$

onde avremo il sistema:

$$\begin{aligned}
\frac{x}{\sigma^2-\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}&=\frac{u}{\mu_1\mu_2\mu_3\left(\frac{M^2}{\varepsilon_1}-\frac{1}{\mu_1}\right)}\\
\frac{y}{\sigma^2-\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}}&=\frac{v}{\mu_1\mu_2\mu_3\left(\frac{M^2}{\varepsilon_2}-\frac{1}{\mu_2}\right)}\\
\frac{z}{\sigma^2-\frac{\mu_3}{\varepsilon_3}}&=\frac{w}{\mu_1\mu_2\mu_3\left(\frac{M^2}{\varepsilon_3}-\frac{1}{\mu_3}\right)}
\end{aligned} \tag{17}$$

« Dalle (17) finalmente tenendo conto della (16) si ottiene col sistema di fattori $\frac{x}{\varepsilon_1}, \frac{y}{\varepsilon_2}, \frac{z}{\varepsilon_3}$ l'equazione della superficie d'onda nella forma:

$$\frac{\frac{x^2}{\varepsilon_1}}{\sigma^2-\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}+\frac{\frac{y^2}{\varepsilon_2}}{\sigma^2-\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}}+\frac{\frac{z^2}{\varepsilon_3}}{\sigma^2-\frac{\mu_3}{\varepsilon_3}}=0 \tag{18a}$$

ovvero in una forma analoga scambiando le ε con le μ, ovvero sviluppando:

$$\begin{aligned}
&(x^2\varepsilon_2\varepsilon_3+y^2\varepsilon_3\varepsilon_1+z^2\varepsilon_1\varepsilon_2)(x^2\mu_2\mu_3+y^2\mu_3\mu_1+z^2\mu_1\mu_2)\\
&-x^2(\varepsilon_2\mu_3+\varepsilon_3\mu_2)-y^2(\varepsilon_3\mu_1+\varepsilon_1\mu_3)-z^2(\varepsilon_1\mu_2+\varepsilon_2\mu_1)+1=0
\end{aligned} \tag{18b}$$

e corrispondentemente in coordinate polari ($x=\varrho m$, $y=\varrho n$, $z=\varrho p$):

$$\frac{m^2}{\varepsilon_1 N^2-\frac{\mu_1}{\varrho^2}}+\frac{n^2}{\varepsilon_2 N^2-\frac{\mu_2}{\varrho^2}}+\frac{p^2}{\varepsilon_3 N^2-\frac{\mu_3}{\varrho^2}}=0, \tag{18c}$$

in cui $N^2 = m^2\mu_2\mu_3 + n^2\mu_3\mu_1 + p^2\mu_1\mu_2$, ovvero:

$$\frac{1}{\varrho^4} - \frac{1}{\varrho^2} \{ m^2(\varepsilon_2\mu_3 + \varepsilon_3\mu_2) + n^2(\varepsilon_3\mu_1 + \varepsilon_1\mu_3) + p^2(\varepsilon_1\mu_2 + \varepsilon_2\mu_1) \}$$
$$+ (m^2\varepsilon_2\varepsilon_3 + n^2\varepsilon_3\varepsilon_1 + p^2\varepsilon_1\varepsilon_2)(m^2\mu_2\mu_3 + n^2\mu_3\mu_1 + p^2\mu_1\mu_2) = 0 \quad (18d)$$

Sotto le due ultime forme appare chiaro che la superficie d'onda si ottiene dalla superficie delle velocità normali col sostituire tutte le lunghezze che in questa compaiono mediante i loro valori reciproci. Dal confronto poi della (18a) colla (12) si vede che essa superficie è di quarto grado e di quarta classe, come la superficie d'onda di Fresnel, della quale essa non è che una generalizzazione formale.

« Vediamo ora quanto avviene nei piani di simmetria. Per $p = 0$ si ha per la superficie delle velocità normali

$$\omega^2 - \frac{m^2}{\varepsilon_2\mu_3} - \frac{n^2}{\varepsilon_1\mu_3} = 0 \quad , \quad \omega^2 - \frac{m^2}{\varepsilon_3\mu_2} - \frac{n^2}{\varepsilon_3\mu_1} = 0$$

per la superficie d'onda

$$x^2\varepsilon_2\mu_3 + y^2\varepsilon_1\mu_3 - 1 = 0 \quad , \quad x^2\varepsilon_3\mu_2 + y^2\varepsilon_3\mu_1 - 1 = 0$$

dunque due ovali e risp. due ellissi, mentre secondo la teoria di Fresnel si ha un'ovale ed un cerchio, e rispettivamente un'ellissi ed un cerchio.

« Il caso che abbiamo ora considerato della coincidenza degli assi principali magnetici ed elettrici ha luogo certamente per cristalli appartenenti al sistema trimetrico, in cui essi assi coincidono cogli assi di simmetria cristallografica.

« Nel sistema dimetrico ed esagonale avremo inoltre, se l'asse delle z coincide coll'asse principale, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, $\mu_1 = \mu_2$ ed allora la superficie delle velocità normali si scinde in

$$\omega^2 - \frac{m^2 + n^2}{\varepsilon_3\mu_1} - \frac{p^2}{\varepsilon_1\mu_1} = 0 \quad , \quad \omega^2 - \frac{m^2 + n^2}{\varepsilon_1\mu_3} - \frac{p^2}{\varepsilon_1\mu_1} = 0$$

e la superficie d'onda in

$$(x^2 + y^2)\varepsilon_3\mu_1 + z^2\varepsilon_1\mu_1 = 1 \quad , \quad (x^2 + y^2)\varepsilon_1\mu_3 + z^2\varepsilon_1\mu_1 = 1$$

ossia due ovaloidi di rivoluzione e risp. due ellissoidi di rivoluzione, invece di un ovaloide di rivoluzione ed una sfera e rispettivamente un'ellissoide di rivoluzione ed una sfera. Notiamo che i due ellissoidi della superficie d'onda si toccano nei poli e che uno di essi si distingue dall'ellissoide dei cristalli non magnetici solo in quanto i suoi assi vengono diminuiti nel rapporto $1/\sqrt{\mu_1}$.

« Veniamo ora al caso più generale corrispondente al sistema triclino. Sia

$$\varepsilon = \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{vmatrix} \qquad \mu = \begin{vmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23} \\ \mu_{31} & \mu_{32} & \mu_{33} \end{vmatrix}$$

e poniamo

$$\varepsilon'_{hk} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varepsilon_{hk}} \qquad \mu'_{hk} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial \mu_{hk}}$$

e varrà ancora $\qquad \varepsilon'_{hk} = \varepsilon'_{kh} \qquad \mu'_{hk} = \mu'_{kh}$.

Allora avremo

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial t} &= \mu'_{11} \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) + \mu'_{12} \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) + \mu'_{13} \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial M}{\partial t} &= \mu'_{21} \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) + \mu'_{22} \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) + \mu'_{23} \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) \qquad (1a)' \\ \frac{\partial N}{\partial t} &= \mu'_{31} \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) + \mu'_{32} \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) + \mu'_{33} \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X &= \varepsilon'_{11} u + \varepsilon'_{12} v + \varepsilon'_{13} w \\ Y &= \varepsilon'_{21} u + \varepsilon'_{22} v + \varepsilon'_{23} w \qquad (2)' \\ Z &= \varepsilon'_{31} u + \varepsilon'_{32} v + \varepsilon'_{33} w \end{aligned}$$

Derivando le $(1\,b)$ rispetto a t noi avremo a sinistra $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ ed a destra certi aggregati di derivate seconde parziali di u, v, w rispetto ad x, y, z, che non trascrivo per brevità. Introducendo ora l'ipotesi di onde polarizzate linearmente, ossia le relazioni (6), avremo un sistema

$$\begin{aligned} M(a_{11} - \omega^2) &+ N a_{12} &+ P a_{13} &= 0 \\ M a_{21} &+ N(a_{22} - \omega^2) &+ P a_{23} &= 0 \qquad (19) \\ M a_{31} &+ N a_{32} &+ P(a_{33} - \omega^2) &= 0 \end{aligned}$$

in cui

$$\begin{aligned} a_{11} = {} & (\varepsilon'_{11} \mu'_{33} - \varepsilon'_{13} \mu'_{13}) n^2 + (\varepsilon'_{11} \mu'_{22} - \varepsilon'_{12} \mu'_{12}) p^2 \\ & + (\varepsilon'_{12} \mu'_{13} + \varepsilon'_{13} \mu'_{12} - 2\varepsilon'_{11} \mu'_{33}) np + (\varepsilon'_{12} \mu'_{23} - \varepsilon'_{13} \mu'_{22}) mp \\ & + (\varepsilon'_{13} \mu'_{23} - \varepsilon'_{12} \mu'_{33}) mn \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{12} = {} & (\varepsilon'_{12} \mu'_{33} - \varepsilon'_{23} \mu'_{13}) n^2 + (\varepsilon'_{12} \mu'_{22} - \varepsilon'_{22} \mu'_{12}) p^2 \\ & + (\varepsilon'_{22} \mu'_{13} + \varepsilon'_{23} \mu'_{12} - 2\varepsilon'_{12} \mu'_{23}) np + (\varepsilon'_{22} \mu'_{23} - \varepsilon'_{23} \mu'_{22}) mp \\ & + (\varepsilon'_{23} \mu'_{23} - \varepsilon'_{22} \mu'_{33}) mn \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{13} = {} & (\varepsilon'_{13} \mu'_{33} - \varepsilon'_{33} \mu'_{13}) n^2 + (\varepsilon'_{13} \mu'_{22} - \varepsilon'_{23} \mu'_{12}) p^2 \\ & + (\varepsilon'_{23} \mu'_{13} + \varepsilon'_{33} \mu'_{12} - 2\varepsilon'_{13} \mu'_{23}) np + (\varepsilon'_{23} \mu'_{23} - \varepsilon'_{33} \mu'_{22}) mp \\ & + (\varepsilon'_{33} \mu'_{23} - \varepsilon'_{23} \mu'_{33}) mn \end{aligned}$$

Gli altri a si ottengono da questi mediante le permutazioni circolari

$$\} a_{11}\, a_{22}\, a_{33} \{ \quad \} a_{12}\, a_{23}\, a_{31} \{ \quad \} a_{13}\, a_{21}\, a_{32} \{ \quad \} m\, n\, p \{$$
$$\} \varepsilon_{11}\, \varepsilon_{22}\, \varepsilon_{33} \{ \quad \} \varepsilon_{12}\, \varepsilon_{23}\, \varepsilon_{13} \{ \quad \} \mu_{11}\, \mu_{22}\, \mu_{33} \{ \quad \} \mu_{12}\, \mu_{23}\, \mu_{13} \{$$

Annullando il determinante dei coefficienti M, N, P delle (19) oppure di due delle (19) e della (7) si giunge alla superficie delle velocità normali, che si può ridurre alla seguente forma:

$$
\begin{aligned}
\omega^4 - \omega^2 \, [m^2|\varepsilon'\mu'|_{11} + n^2|\varepsilon'\mu'|_{22} + p^2|\varepsilon'\mu'|_{33} + 2np|\varepsilon'\mu'|_{23} + 2pm|\varepsilon'\mu'|_{13} + 2mn|\varepsilon'\mu'|_{12}] \\
+ \{m^2\,|\varepsilon'|_{11} + n^2\,|\varepsilon'|_{22} + p^2\,|\varepsilon'|_{33} + 2np\,|\varepsilon'|_{23} + 2pm\,|\varepsilon'|_{13} + 2mn\,|\varepsilon'|_{12}\} \,. \\
\{m^2\,|\mu'|_{11} + n^2\,|\mu'|_{22} + p^2\,|\mu'|_{33} + 2np\,|\mu'|_{23} + 2pm\,|\mu'|_{13} + 2mn\,|\mu'|_{12}\} = 0
\end{aligned}
$$

Per l'intelligenza dei simboli adoperati basterà segnare

$$
\begin{aligned}
|\varepsilon'\mu'|_{11} &= \varepsilon'_{22}\,\mu'_{33} + \varepsilon'_{33}\,\mu'_{22} - 2\varepsilon'_{23}\,\mu'_{23} \\
|\varepsilon'\mu'|_{23} &= \varepsilon'_{12}\,\mu'_{13} - \varepsilon'_{11}\,\mu'_{23} + \varepsilon'_{13}\,\mu'_{12} - \varepsilon'_{23}\mu'_{11} \\
|\varepsilon'|_{11} &= \varepsilon'_{22}\,\varepsilon'_{33} - \varepsilon'_{23}\,, \qquad |\varepsilon'|_{23} = \varepsilon'_{12}\,\varepsilon'_{13} - \varepsilon'_{11}\,\varepsilon'_{23}
\end{aligned}
$$

« Veniamo ora al sistema monoclino. Se l'asse delle z coincide coll'asse di simmetria si ha

$$\mu_{13} = \mu_{23} = 0 \qquad\qquad \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0$$

ed analogamente per gli stessi segni coll'accento. Allora la superficie delle velocità normali diventa

$$
\begin{aligned}
\omega^4 - \omega^2 \{m^2(\varepsilon'_{22}\,\mu'_{33} + \varepsilon'_{33}\,\mu'_{22}) + n^2(\varepsilon'_{11}\,\mu'_{33} + \varepsilon'_{33}\,\mu'_{11}) \\
+ p^2(\varepsilon'_{11}\mu'_{22} + \varepsilon'_{22}\,\mu'_{11} - 2\varepsilon'_{12}\,\mu'_{12}) - 2mn\,(\varepsilon'_{33}\,\mu'_{12} + \varepsilon'_{12}\,\mu_{33})\} \\
+ (m^2\,\varepsilon'_{22}\,\varepsilon'_{33} + n^2\,\varepsilon'_{11}\,\varepsilon'_{33} + p^2\,(\varepsilon'_{11}\,\varepsilon'_{22} - \varepsilon^2_{12}) - 2mn\,\varepsilon'_{12}\,\varepsilon'_{33}) \\
(m^2\,\mu'_{22}\mu'_{33} + n^2\,\mu'_{11}\mu'_{33} + p^2\,(\mu'_{11}\mu'_{22} - \mu^2_{12}) - 2mn\,\mu'_{12}\mu'_{33}) = 0
\end{aligned}
$$

« Se ora noi stiamo nel piano di simmetria ($p = 0$), avremo che la sezione si scinde nelle due ovali

$$
\begin{aligned}
\omega^2 - \mu'_{33}\,(m^2\,\varepsilon'_{22} + n^2\,\varepsilon'_{11} - 2mn\,\varepsilon'_{12}) = 0 \\
\omega^2 - \varepsilon'_{33}\,(m^2\,\mu'_{22} + n^2\,\mu'_{11} - 2mn\,\mu'_{12}) = 0
\end{aligned}
$$

Trattandosi di un piano di simmetria, è chiaro che la sezione della superficie d'onda, di cui la superficie delle velocità normali è la podaria, sarà una curva, la cui podaria è la sezione della superficie delle velocità normali. Ora le due ovali di sopra sono le due podarie delle ellissi

$$
\begin{aligned}
\varepsilon'_{11}\,x^2 + \varepsilon'_{22}\,y^2 + 2\varepsilon'_{12}\,xy - \mu'_{33}\,(\varepsilon'_{11}\,\varepsilon'_{22} - \varepsilon^2_{12}) = 0 \\
\mu'_{11}\,x^2 + \mu'_{22}\,y^2 + 2\mu'_{12}\,xy - \varepsilon'_{33}\,(\mu'_{11}\,\mu'_{22} - \mu^2_{12}) = 0
\end{aligned}
$$

i cui assi principali coincidono cogli assi dielettrici e rispettivamente magnetici contenuti nel piano di simmetria.

« I risultati di sopra forniscono il mezzo di una verifica sperimentale se le costanti magnetiche possano essere diverse in diverse direzioni per vibrazioni luminose; uno studio teorico più approfondito sarà giustificato solo ove l'esperienza confermasse la detta possibilità ».

Chimica. — *Ricerche sul comportamento della nitrobenzina come solvente nelle ricerche crioscopiche* [1]. Nota di G. Ampola ed E. Carlinfanti, presentata dal Socio Paternò.

« Le numerose ricerche cha seguirono la scoperta di Raoult, e che hanno avuto per iscopo di stabilire sino a qual punto fosse applicabile il metodo crioscopico per la determinazione dei pesi molecolari, hanno subito mostrato che non tutti i solventi davano risultati attendibili per i varî composti: e così mentre è stato provato che nell'acido acetico tutte le sostanze dànno abbassamenti molecolari normali, nella benzina invece le sostanze che contengono l'ossidrile si comportano in modo affatto irregolare [2]; similmente si comporta il paraxilene [3], il bromoformio [4] ed altri solventi neutri.

« Queste ed altre anomalie si sono spiegate con la formazione delle così dette soluzioni solide, dovute all'analogia di costituzione tra solvente e sostanza disciolta. L'argomento è certo importante ed è per portare un nuovo contributo a questi studî che abbiamo voluto esaminare attentamente la nitrobenzina.

« La nitrobenzina come solvente in crioscopia fu introdotta dal Raoult [5], il quale esaminò il comportamento di 18 sostanze di varia funzione, e mostrò che essa si comportava rispetto agli alcool ed agli acidi in modo simile alla benzina; in qualche rara occasione è stata adoperata per determinazione di pesi molecolari, e recentemente Dahms [6] ha studiato i punti di congelamento di miscugli di essa con benzina, bromuro d'etilene, acido acetico, fenol e mentol.

« Per procurarci la nitrobenzina necessaria alle nostre esperienze, abbiamo purificato l'essenza di mirbane commerciale, lavandola prima con carbonato sodico, poi distillandola a pressione ridotta, e terminando di purificarla per cristallizzazione. Abbiamo così avuto un prodotto che congelava a 3°,84.

« Per una nitrobenzina fondente a 5°,28 Petterson ha trovato il calore latente di fusione eguale a 22,3, onde con la nota formola di Van't Hoff si calcola per costante dell'abbassamento molecolare il numero 68,6 che come vedremo corrisponde molto bene a quello che risulta dalle nostre esperienze.

« Nelle nostre ricerche abbiamo operato secondo Beckmann, ed abbiamo usato dei termometri di Baudin, divisi in cinquantesimi di grado.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto chimico della R. Università di Roma.
(2) Paternò, Gazz. chim., t. XIX.
(3) Paternò e Montemartini, Gazz. chim., t. XXIV, p. II.
(4) Ampola e Manuelli, Gazz. chim., t. XXV, p. II.
(5) Annales de chimie et de physique, 1884, p. 78.
(6) Poggendorff's Annalen.

« I risultati da noi ottenuti sono compresi nelle seguenti tavole:

I. Sostanze varie.

Benzina C_6H_6. PM = 78

N. d'ord.	Concentrazione	Abbassamento termometrico	Coefficiente di abbassamento	Abbassamento molecol.	Peso molecolare T = 69
1	0,2476	0°,24	0,969	75,582	71,1
2	0,7238	0 ,67	0,925	72,150	74,6
3	1,4632	1 ,30	0,888	69,264	77,6
4	2,5580	2 ,19	0,856	66,768	80,6
5	4,4123	3 ,73	0,845	65,910	
6	6,8957	5 ,54	0,803	62,634	
7	9,5476	7, 44	0,779	60,762	89,8

Bromobenzina C^6H^5Br. PM. = 157

N. d'ord.	Concentrazione	Abbassamento termometrico	Coefficiente di abbassamento	Abbassamento molecol.	Peso molecolare T = 69
8	0,5434	0°,26	0,478	75,046	144,6
9	1,5694	0 ,70	0,446	70,022	
10	2,9648	1 ,29	0,435	68,295	158,5
11	4,4031	1 ,86	0,422	66,254	
12	11,5623	4 ,54	0,392	61,544	
1	31,5627	10 ,90	0,345	54,165	199,8

Toluol $C^6H^5CH^3$. PM. = 92

N. d'ord.	Concentrazione	Abbassamento termometrico	Coefficiente di abbassamento	Abbassamento molecol.	Peso molecolare T = 69
14	0,4267	0°,32	0,749	68,908	92
15	1,2873	0 ,97	0,753	69,276	
16	2,6392	1 ,92	0,727	66,884	94,8
17	7,2377	4 ,79	0,661	60,812	
18	10,4309	6 ,66	0,638	50,696	
19	13,9974	8 ,52	0,608	55,936	
20	17,0162	10 ,11	0,594	54,648	
21	21,0864	11 ,94	0,566	51,520	121,9

Bromotoluol $C^6H^4Br\,CH^3$. PM. = 171

N. d'ord.	Concentrazione	Abbassamento termometrico	Coefficiente di abbassamento	Abbassamento molecol.	Peso molecolare T = 69
22	0,5207	0°,24	0,460	78,660	149,7
23	1,5678	0 ,72	0,459	78,489	
24	3,3944	1 ,44	0,424	72,504	162,6
25	9,8291	3 ,85	0,391	66,861	
26	15,5313	5 ,72	0,368	62,928	
27	30,9048	9 ,95	0,321	54,891	
28	46,0009	13 ,63	0,296	50,616	232,8

Para-xilene $C^6H^4(CH^3)^2$. PM. = 106

N. d'ord.	Concentrazione	Abbassamento termometrico	Coefficiente di abbassamento	Abbassamento molecol.	Peso molecolare T = 69
29	1,1448	0°,76	0,663	70,278	103,9
30	2,4527	1 ,57	0,640	67,840	
31	3,9732	2 ,52	0,634	67,204	110,5
32	6,0727	3 ,79	0,624	66,144	
33	8,3878	4 ,91	0,585	62,010	
34	12,4066	6 ,71	0,540	57,240	
35	16,4203	8 ,39	0,510	54,060	
36	21,1325	10 ,23	0,484	51,304	142,5

Benzaldeide C^6H^5COH. PM. = 106

N. d'ord.	Concentrazione	Abbassamento termometrico	Coefficiente di abbassamento	Abbassamento molecol.	Peso molecolare T = 69
37	0,5895	0°,43	0,729	77,274	81,7
38	1,8013	1 ,16	0,643	68,158	
39	3,3804	2 ,08	0,615	65,190	112,1
40	5,8136	3 ,47	0,596	63,176	
41	9,8048	5 ,54	0,565	59,890	
42	14,3685	7 ,94	0,552	58,512	
43	18,9291	10 ,08	0,532	56,392	
44	24,2482	12 ,32	0,507	53,742	135,8

Veratrol $C^6H^4(OCH^3)^2$. PM. = 138

N. d'ord.	Concentrazione	Abbassamento termometrico	Coefficiente di abbassamento	Abbassamento molecol.	Peso molecolare T = 69
45	0,7715	0°,41	0,5314	73,3332	129,8
46	2.3093	1 ,19	0,5153	71,1114	134
47	8,5291	4 ,15	0,4865	67,1370	
48	13,6171	6 ,49	0,4766	65,7708	
49	18,9256	8 ,89	0,4697	64,8186	
50	24,0382	14 ,21	0,4663	64,3494	148

Naftalina

$C^{10}H^8$. PM. = 128

N. d'ord.	Concentrazione	Abbassamento termometrico	Coefficiente di abbassamento	Abbassamento molecol.	Peso molecolare T = 69
51	0,0299	0°,02	0,668	85,404	100,15
52	0,1307	0 ,09	0,688	88,064	
53	0,7472	0 ,48	0,642	82,176	107,41
54	2,0489	1 ,12	0,546	69,888	126,2
55	5,1154	2 ,65	0,518	66,256	133,2
56	8,7227	4 ,40	0,504	64,512	
57	11,6210	5 ,60	0,481	61,568	143,1

Ossalato di Etile

$(CO^2.C^2H^5)^2$. PM. = 146

N. d'ord.	Concentrazione	Abbassamento termometrico	Coefficiente di abbassamento	Abbassamento molecol.	Peso molecolare T = 69
58	0,4995	0°,24	0,4804	70,1384	143,6
59	1,7091	0 ,86	0,5031	73,4526	
60	3,8258	2 ,06	0,5384	78,6064	128,2
61	5,6359	2 ,94	0,5216	76,1536	132,3
62	8,3738	4 ,09	0.4764	69,5544	
63	12,2125	5 ,55	0,4544	66,3424	
64	17,2935	8 ,21	0,4747	69.3062	
65	34,5357	15 ,52	0,4493	65,5978	153,5

Tiofene C^4H^4S. PM. = 84

N. d'ord.	Concentrazione	Abbassamento termometrico	Coefficiente di abbassamento	Abbassamento molecol.	Peso molecolare T = 69
66	0,5189	0°,42	0,809	67.956	85,2
67	1,5688	1 ,28	0.815	68,460	
68	3,1012	2 ,54	0,819	68,796	
69	6,0731	4 ,50	0,740	62,160	93
70	9,1810	6 ,58	0,716	60,144	
71	12,2137	8 ,72	0,713	59,892	
72	15,6956	10 ,78	0,686	57,624	
73	19,5525	12 ,38	0,633	53,172	100,8

Cloroformio

$CHCl^3$. PM. = 120

N. d'ord.	Concentrazione	Abbassamento termometrico	Coefficiente di abbassamento	Abbassamento molecol.	Peso molecolare T = 69
74	0 3436	0°,20	0,582	69,840	118,5
75	1,6628	0 ,94	0,565	67,800	
76	2,8107	1 ,57	0,558	66,960	
77	4,4707	2 ,52	0,563	67,560	123,5
78	7,1159	3 ,86	0,542	65,040	
79	9,9133	5 ,34	0,538	64,560	
80	12,8478	6 ,77	0,526	63,120	
81	16,5201	8 ,42	0, 10	61,200	
82	27,1949	13 ,30	0,488	58,560	5140,3

Broformio $CHBr^3$. PM. = 253

N. d'ord.	Concentrazione	Abbassamento termometrico	Coefficiente di abbassamento	Abbassamento molecol.	Peso molecolare T = 69
83	0,7393	0°,22	0,297	75,141	231,8
84	1,7192	0 ,50	0,290	73,370	
85	3,7058	1 ,02	0,275	69,575	250,6
86	6,6820	1 ,82	0,272	68,816	
87	12,0534	3 ,08	0,255	64,515	
88	15,5566	3 ,98	0,255	64,515	
89	22,4670	5 ,51	0,245	61,985	
90	29,0038	7 ,02	0,241	60,973	
91	44,0046	10 ,06	0,228	57,684	301,8

II. Acidi.

Acido formico H. COOH. PM. = 46

N. d'ord.	Concentrazione	Abbassamento termometrico	Coefficiente di abbassamento	Abbassamento molecol.	Peso molecolare T = 69
92	0,5494	0°,49	0,891	40,986	77
93	1,4085	1 ,16	0,823	37,858	
94	2,7831	2 ,12	0,754	34,684	90
95	4,5270	3 ,07	0,678	31,188	
96	7,9656	4 ,52	0,567	26,082	
97	14,1873	6 ,33	0,446	20,516	
98	18,7854	7 ,22	0,384	17,664	
99	34,9658	8 ,00	0,228	10,488	301

Acido Acetico CH_3. COOH. PM. = 60

N. d'ord.	Concentrazione	Abbassamento termometrico	Coefficiente di abbassamento	Abbassamento molecol.	Peso molecolare T = 69
100	0,3458	0°,28	0,809	48,54	85
101	0,9690	0 ,64	0,606	36,36	
102	1,9238	1 ,17	0,608	36,48	
103	2,9595	1 ,72	0,581	34,86	118
104	4,7234	2 ,65	0,561	33,66	
105	6,4490	3 ,41	0,528	31,68	
106	9,0698	4 ,68	0,515	30,90	
107	13,4786	6 ,32	0,468	28,08	
108	18,1006	7 ,96	0,439	26,34	156

Acido Valerianico

$CH^3(CH^2)^3COOH$. PM. = 102

N. d'ord.	Concentrazione	Abbassamento termometrico	Coefficiente di abbassamento	Abbassamento molecol.	Peso molecolare T = 69
109	0,3750	0°,18	0,480	48,960	143
110	0,9488	0 ,44	0,463	47,226	
111	2,3691	0 ,92	0,388	39,576	177
112	4,2901	1 ,54	0,358	36 516	
113	6,7576	2 ,29	0,338	34,476	
114	10,6698	3 ,25	0,304	31,008	
115	16,5487	4 ,65	0.280	28,560	
116	26,2094	6 ,56	0,250	25,500	
117	41,9428	8 ,23	0,196	19 992	351

Acido Isobutirrico

$(CH^3)^2CH.COOH$. PM. = 88

N. d'ord.	Concentrazione	Abbassamento termometrico	Coefficiente di abbassamento	Abbassamento molecol.	Peso molecolare T = 69
118	0,3336	0°,22	0,6565	57,7720	104
119	1,0545	0 ,50	0,4741	41,7208	
120	2,4479	1 ,05	0,4280	37,6640	160
121	4,2274	1 ,71	0,4046	35,6048	
122	7,2840	2 ,73	0,3747	32,9736	
123	12,6793	4 ,43	0,3493	30,7384	
124	18,5225	6 ,06	0,3271	28,7848	
125	24,8895	7 ,54	0,3029	26,6552	
126	37,3474	9 ,98	0,2672	23,5136	259

III. Alcooli.

Alcool etilico. CH^3CH^2OH. PM. = 46

N. d'ord.	Concentrazione	Abbassamento termometrico	Coefficiente di abbassamento	Abbassamento molecol.	Peso molecolare T = 69
127	0,4047	0°,51	1,2601	57,9646	54
128	1,1637	1 ,32	1,1343	52,1778	
129	3,5487	2 ,745	0,7735	35,5810	89
130	4,9108	3 ,22	0,6556	30,1576	
131	6,8769	3 ,78	0,5496	25,2816	
132	9,2840	4 ,25	0,4577	21,0542	
133	17,4123	5 ,24	0,3009	13,8414	
134	27,9867	6 ,05	0,2161	9,9406	
135	46,2883	6 ,84	0,1477	6,7942	466

Alcool iso-propilico.

$(CH^3)^2CHOH$.PM. = 60

N. d'ord.	Concentrazione	Abbassamento termometrico	Coefficiente di abbassamento	Abbassamento molecol.	Peso molecolare T = 69
136	0,2686	0°,32	1,191	71,460	57
137	0,7875	0 ,84	1,066	63,960	
138	1,8345	1 ,58	0,861	51,660	
139	2,8661	2 ,12	0,739	44,340	93
140	4,1274	2 ,69	0.651	39,060	
141	6,8275	3 ,42	0,500	30,000	
142	15,8864	4 ,70	0,295	17,700	
143	26,0487	5 ,48	0,210	12,600	
144	52,4657	6 ,21	0,118	7,080	583

Alcool isobutilico.

$(CH^3)^2CH.CH^2OH$. PM. = 74

N. d'ord.	Concentrazione	Abbassamento termometrico	Coefficiente di abbassamento	Abbassamento molecol.	Peso molecolare T = 69
145	0,3671	0°,35	0,953	70,522	72
146	1,0647	0 ,94	0,882	65,268	
147	2,1932	1 ,65	0,752	55,648	92
148	3,4491	2 ,20	0,637	47,138	
149	5,8766	2 ,99	0,508	37,592	
150	13,5503	4 ,11	0,303	22,422	
151	26,6427	4 ,84	0,181	13,394	
152	49,5631	5 ,02	0,101	7,474	681

Alcool caprilico $C^8H^{18}O$. PM. = 130

N. d'ord.	Concentrazione	Abbassamento termometrico	Coefficiente di abbassamento	Abbassamento molecol.	Peso molecolare T = 69
153	0,3466	0°,23	0,663	86,190	104
154	1,1571	0 ,65	0,561	72,930	
155	2,6133	1 ,31	0,501	65,130	138
156	3,7240	1 ,76	0,472	61,360	
157	5,4033	2 ,35	0,434	56,420	
158	8,4174	3 ,33	0,395	51,350	
159	16,3601	5 ,20	0,317	41,210	
160	25,3726	6 ,71	0,264	34.320	
161	41,6388	8 ,89	0,213	27,690	323

Trimetil carbinol

$(CH^3)^3COH$. PM. = 74

N. d'ord.	Concentrazione	Abbassamento termometrico	Coefficiente di abbassamento	Abbassamento molecol.	Peso molecolare T = 69
162	0,5325	0°,46	0,863	63,862	79,8
163	1,1138	0 ,91	0.817	60,458	
164	2,1026	1 ,60	0,760	56,240	90,6
165	3,6676	2 ,40	0,654	48,396	
166	11,9431	4 ,62	0,386	28,564	178,3

Alcool Benzilico

$C^6H^5CH^2OH$. PM. = 108

N. d'ord.	Concentrazione	Abbassamento termometrico	Coefficiente di abbassamento	Abbassamento molecol.	Peso molecolare T = 69
167	0,6200	0°,38	0,612	66,096	112
168	1,9151	1 ,08	0,563	60,804	
169	4,0302	2 ,02	0,501	54,108	137
170	7,3092	3 ,22	0,440	47,520	
171	20,8253	6 ,28	0,301	32,508	
172	31,1205	8 ,20	0,263	28,404	
173	43,3234	10 ,06	0,232	25,056	
174	59,2995	11 ,94	0,201	21,708	342

Alcool cinnamico

$C^6H^5CH.CH.CH^2OH$. PM. = 134

N. d'ord.	Concentrazione	Abbassamento termometrico	Coefficiente di abbassamento	Abbassamento molecol.	Peso molecolare T = 69
175	0,5413	0°,34	0.628	84,152	109
176	1,8523	0 ,90	0,485	64,990	
177	2,9618	1 ,35	0,455	60,970	143
178	4,1194	1 ,78	0,432	57,888	
179	5,2521	2 ,14	0,407	54,538	
180	8,9743	3 ,08	0,343	45,962	
181	14,9110	4 ,35	0,291	38,994	
182	25,7552	6 ,28	0,243	32,562	282

Etere dietilico della glicerina

$C^3H^5 \langle {OH \atop (OC^2H^5)^2}$ PM. = 148

N. d'ord.	Concentrazione	Abbassamento termometrico	Coefficiente di abbassamento	Abbassamento molecol.	Peso molecolare T = 69
183	0,4584	0°,20	0,4363	64,5724	158
184	2,5809	1 ,02	0,3952	58,4896	
185	4,2762	1 ,57	0,3671	54,3308	187
186	6,7362	2 ,38	0,3533	52,2884	
187	9,8058	3 ,16	0,3222	47,6856	
188	14,1529	4 ,32	0,3052	45,1696	
189	21,0461	5 ,54	0,2632	38,9536	
190	28,4059	7 ,38	0.2598	38,4504	
191	44,8834	10 ,64	0,2370	35,0760	291

IV. Fenoli.

Fenol C^6H^5OH. PM. = 94

N. d'ord.	Concentrazione	Abbassamento termometrico	Coefficiente di abbassamento	Abbassamento molecol.	Peso molecolare T = 69
192	1,0726	0°,87	0,811	76,234	85
193	2,3147	1 ,68	0,725	68,150	
194	3,7041	2 ,50	0,674	63,356	102
195	5,9180	3 ,90	0,659	61,946	
196	8,3685	5 ,13	0,612	57,528	
197	12,3314	7 ,10	0,575	54,050	
198	17,2563	9 ,34	0,541	50,854	127

Timol

$C^6H^3(CH^3)(C^3H^7)OH$. PM. = 149

N. d'ord.	Concentrazione	Abbassamento termometrico	Coefficiente di abbassamento	Abbassamento molecol.	Peso molecolare T = 69
199	0,4688	0°.26	0,554	82,546	124
200	1,6222	0 ,76	0.468	69,732	
201	3,4264	1 ,48	0,431	64,219	159
202	10,0732	4 ,07	0,404	60,196	
203	15,1515	5 ,90	0,389	57.961	
204	20,6438	8 ,04	0,389	57,961	
205	30,1847	11 ,12	0,368	54,832	187

Para-Cresol

$C^6H^4(CH^3)OH$. PM. = 108

N. d'ord.	Concentrazione	Abbassamento termometrico	Coefficiente di abbassamento	Abbassamento molecol.	Peso molecolare T = 69
206	0,5863	0°,30	0,511	55,188	134
207	1,5474	0 ,89	0,575	62.100	
208	3,3799	1 ,82	0,538	58,104	161
209	6,3401	3 ,33	0.525	56,700	
210	11,6147	5 ,55	0,476	51.408	
211	16,5544	7 ,48	0,451	48,708	
212	23,4318	9 ,85	0,420	45,360	166

V. Alcaloidi.

Anilina $C^6H^5NH^2$. PM. = 93

N. d'ord.	Concentrazione	Abbassamento termometrico	Coefficiente di abbassamento	Abbassamento molecol.	Peso molecolare T = 69
213	0,5723	0°,49	0,856	79,608	80,5
214	1,8687	1 ,45	0,775	72,075	
215	3,8980	2 ,77	0,710	66,030	97
216	7,1785	4 ,87	0,678	63,054	
217	11,0633	7 ,17	0,648	60,264	
218	15,0976	9 ,41	0,623	57,939	
219	19,4614	11 ,77	0,604	56,172	
220	21,4049	12 ,21	0,570	53,010	121

Dimetil-anilina

$C^6H^5N(CH^3)^2$. PM. = 121

N. d'ord.	Concentrazione	Abbassamento termometrico	Coefficiente di abbassamento	Abbassamento molecol.	Peso molecolare T = 69
221	1,1329	0°,67	0,591	71,511	116,7
222	2,5856	1 ,47	0,568	68,728	121,3
223	5,5555	3 ,09	0 556	67,276	
224	12,1739	6 ,29	0,516	62,436	
225	16,2100	8 ,19	0,505	61,105	
226	18,7807	9 ,29	0,494	59.774	
227	23,4679	11 ,45	0,487	58,927	141,4

Coniina $C^8H^{17}N$. PM. = 127

N. d'ord.	Concentrazione	Abbassamento termometrico	Coefficiente di abbassamento	Abbassamento molecol.	Peso molecolare T = 69
228	2,3755	1°,10	0,463	58,801	149
229	3,7128	1 ,64	0,441	56,007	
230	6,3212	2 ,70	0,427	54,229	
231	8,9529	3 ,64	0,406	51,562	
232	14.3888	5 ,51	0,382	48,514	
233	22,7264	7 ,62	0,335	42 545	205

Chinolina

$C^6H^4 \langle {CH . CH \atop N = CH}$ PM. = 128.7

N. d'ord.	Concentrazione	Abbassamento termometrico	Coefficiente di abbassamento	Abbassamento molecol.	Peso molecolare T = 69
234	0,7446	0°,52	0,698	89,8326	98,7
235	2,1382	1 ,26	0.589	75,8043	117,6
236	4.1781	2 ,36	0,564	72,5868	126,3
237	7,2031	3 ,78	0,524	67.4388	
238	11,8574	5 ,88	0,495	63,7065	
239	18,9575	8 ,64	0,455	58,5585	
240	23,1931	10 ,24	0,441	56,7567	
241	28,2534	12 ,10	0,428	55,0836	161

Piridina C^5H^5N. PM. = 79

N. d'ord.	Concentrazione	Abbassamento termometrico	Coefficiente di abbassamento	Abbassamento molecol.	Peso molecolare T = 69
242	2,4852	1°,96	0,788	62,252	87,4
243	4,4749	3 ,40	0,759	59,961	
244	7,3427	5 ,56	0,757	59,803	
245	10,5574	7 ,67	0 726	57,354	
246	13,9530	9 ,90	0,709	56,011	
247	17,3552	11 ,88	0,684	54,036	100,7

Piperidina $C^3H^{10}NH$. PM. = 85

N. d'ord.	Concentrazione	Abbassamento termometrico	Coefficiente di abbassamento	Abbassamento molecol.	Peso molecolare T = 69
248	3,4977	2°,13	0,608	51,680	113
249	6,2997	3 ,76	0,596	50,660	
250	10,1941	5 ,99	0,587	49,895	
251	15,0079	8 ,18	0,545	46,325	
252	19,4516	10 ,04	0,516	43,860	
253	24,0629	11 ,56	0,480	40,800	143

« Dall'esame dei dati riportati risulta che il comportamento della nitrobenzina è analogo a quello della benzina, del bromoformio, del paraxilene, e del parabromotoluene, recentemente studiato dal prof. Paternò:

« 1° Hanno un comportamento che può dirsi normale il paraxilene, la benzina, il toluene, il tiofene, il veratrol, la naftalina, il bromoformio, il cloroformio, la bromobenzina, il bromotoluene, il bromuro d'etile, l'aldeide benzoica. Il tiofene, che nella benzina è anormale, presenta invece un comportamento regolare in questo solvente, come avviene nel paraxilene e nel bromoformio.

« 2° Degli alcaloidi hanno un comportamento normale l'anilina e la dimetilanilina, e vediamo che per concentrazioni comprese tra 1 e 5,5 %, l'abbassamento molecolare non varia. Degli altri alcaloidi quello che si avvicina più al normale è la chinolina; l'allontanarsi degli altri dal valore normale sarà certamente dovuto a reazioni che avvengono tra solvente e sostanza per le colorazioni che assumono.

« 3° Per gli acidi l'analogia con la benzina, il paraxilene ed il bromoformio è completa, e producono abbassamenti che oscillano intorno alla metà del normale.

« 4° Per gli alcool il comportamento è completamente lo stesso che per gli altri solventi.

« 5° Per i fenoli si avvera quello che si avvera per gli altri solventi analoghi, cioè l'anomalia più marcata la presenta il fenol ordinario, mentre mano mano che si sale nella serie il comportamento si va sempre più avvicinando al normale.

« In quanto al numero da sceglier e come costante dell'abbassamento molecolare, Raoult trovò sperimentalmente 70,7, mentre con la sua regola che, cioè una molecola di sostanza qualunque sciolta in 100 molecole di solvente qualunque, produce nel punto di congelamento del solvente un abbassamento costante di 0°,62, calcolò il valore di 76,3.

« Scegliendo fra le nostre esperienze quelle relative a sostanze che hanno un comportamento più regolare, e limitandosi ai dati forniti da soluzioni non troppo concentrati, si hanno le seguenti medie:

1ª	Benzina (2, 3, 4)	66,60
2ª	Bromobenzina (9, 10, 11)	68,19
3ª	Toluene (15, 16)	68,08
4ª	Bromotoluol (23, 24, 25)	72,61
5ª	Paraxilene (30, 31, 32)	68,44
6ª	Benzaldeide (37, 38, 39, 40)	68,44
7ª	Veratrol (46, 47)	69,12
8ª	Naftalina (54, 55)	68,07
9ª	Tiofene (67,68)	68,62
10ª	Bromoformio (85, 86, 87)	70,65
11ª	Cloroformio (75, 76, 77)	67,44
12ª	Anilina (215, 216)	72,57
13ª	Dimetilanilina (222, 223, 224)	69,17

da cui la media generale è 69,07, mentre come abbiamo detto in principio con la formola di Van't Hoff si calcola 68,6.

« Noi crediamo che possa adottarsi il 69 per costante dell'abbassamento molecolare nella nitrobenzina ».

Chimica. — *Sopra alcune soluzioni solide formate da sostanze non isomorfe.* Nota di Felice Garelli, presentata dal Socio Ciamician.

« In precedenti lavori io mi sono occupato di quei casi di anomalie crioscopiche in cui gli abbassamenti anormalmente piccoli nel punto di congelamento, sono causati dalla analogia di costituzione chimica, che passa fra il solvente e il corpo sciolto. In alcuni di questi casi si osservò, che tra le sostanze in questione esiste anche isomorfismo o per lo meno havvi stretta analogia di forma cristallina. Infatti le ricerche del prof. Negri [1] hanno dimostrato che l' α- e il β- naftolo sono isomorfi con la naftalina, e che l'antracene mostra grandi analogie cristallografiche con il fenantrene.

« Proseguendo i miei studî io ho potuto trovare molti altri casi di anomalie crioscopiche fra sostanze aventi analoga costituzione chimica; e, come risulta dalle mie ultime Memorie [2], tale anomalia si osserva, non solo per le soluzioni formate da corpi ciclici analogamente costituiti e dello stesso ordine di grandezza, ma anche per quelle nelle quali il solvente e il corpo sciolto hanno catene laterali e queste si corrispondono. Ed io ho trovato pure che le anomalie osservate per le soluzioni di fenolo in benzolo e dei naftoli in naftalina, si ripetono fra l'acido benzoico e gli ossiacidi corrispondenti.

(1) Gazzetta chimica ital., anno XXIII, parte II, pag. 375.

(2) Gazzetta chimica ital., anno XXIV, parte II, pag. 229, e anno XXV, parte II, pag. 173.

« Avendo così raccolto nuovo materiale sperimentale, era interessante vedere se lo studio cristallografico di questi corpi conduceva a risultati analoghi a quelli suaccennati, e a tale scopo io ho pregato il prof. Negri a voler comparare cristallograficamente tutte le sostanze di cui mi sono occupato.

« Pur troppo lo studio cristallografico di molti di questi corpi offre grandi difficoltà, che non sono state sempre completamente superate.

« In alcuni casi però il prof. Negri ha potuto, rivedendo misure già esistenti e completando le lacune lasciate da precedenti osservatori, arrivare ad alcuni risultati dai quali possono trarsi conseguenze abbastanza interessanti. Di fatto, avendo egli comparato innanzi tutto la forma cristallina dell'acido benzoico con quella degli acidi orto- e para-ossibenzoici, degli orto- e para-amminobenzoici, ed infine con quella degli acidi carbopirrolico e piromucico, ha trovato che fra questi corpi non esiste isomorfismo; soltanto sussistono il più delle volte abbastanza strette analogie cristallografiche. Ma ciò che non si accorda con le mie osservazioni crioscopiche è il fatto, che esistono fra l'acido paraossibenzoico e il benzoico quasi le stesse relazioni cristallografiche che passano fra l'acido salicilico e il benzoico, e sopratutto che l'acido para-amidobenzoico somiglia cristallograficamente assai più all'acido benzoico, che non il corrispondente ortoamidoacido. Ora io ho trovato invece, che le soluzioni benzoiche dei paraderivati sono quelle che hanno il comportamento crioscopico più normale.

« Parimenti dalle ricerche del prof. Negri è risultato che l'acido carbopirrolico e il piromucico mostrano entrambi col benzoico quasi le stesse relazioni cristallografiche: non si comprende quindi perchè il secondo abbia, a differenza del primo, un comportamento crioscopico normale.

« Dall'esteso studio cristallografico del prof. Negri, che verrà pubblicato integralmente sulla Gazzetta Chimica, riporto qui soltanto il seguente quadro che riassume quei risultati per me più degni di nota.

	Sistema cristallino	Forme osservate	Costanti cristallografiche $a:b:c$	β	Sfaldatura	Piano degli assi ottici	Autori
Acido benzoico	monoclino	(001), (101), ($\bar{1}01$), (110), (011)	1,0511 : 1 : 4,2081	82°,55′	non osservata	(010)	Bodewig
» *salicilico*	»	(110), (001), (100), (011), ($\bar{1}11$), ($\bar{2}01$)	1,3631 : 1 : 0,4343	49, 03			Marignac
			1,3619 : 1 : 0,4367	49, 05	(110)		Sadebeck
		(110), (201), (100), (211), (111), (001)	1,0298 : 1 : 0,4343	88, 39			orientazione Groth
» *paraossibenzoico*	»	(120), (100), (001), (101), (201), (211)	1,3703 : 1 : 1,0224	74, 34	(100)	(010)	Reusch
	»	($\bar{1}32$), ($\bar{1}02$), (104), (101), (100), (210)	0,9837 : 1 : 3,6637	87, 44 1/2			orientazione Negri
» *ortoamidobenzoico*	trimetrico	(111), (100), (010)	0,5959 : 1 : 0,8601				Haushofer
		» » »	0,5953 : 1 : 0,8563				Negri
» *paraamidobenzoico*	monoclino	(101), ($\bar{1}01$), (110), (011)	1,4403 : 1 : 0,7312	79, 50			1ª. orient. Negri
		($\bar{1}03$), (101), (013), ($\bar{3}23$)	1,0968 : 1 : 4,2661	85, 30 1/2			2ª. orient. Negri
» *carbopirrolico*	monoclino	(100), (001), ($\bar{2}01$), (110)	1,500 : 1 : 1,397	67, 10		(010)	Brezina } 1ª orient
	»	(001), ($\bar{2}01$), (110)	[1]				Negri } 1ª orient
		(101), (001), ($\bar{1}01$), (232)	0,9995 : 1 : 3,4612	82, 36			Brezina } 2ª »
		(001), ($\bar{1}01$), (232)	0,9945 : 1 : 3,5125	82, 33			Negri } 2ª »
» *piromucico*	»	(010), (120), (210), (011)	0,9556 : 1 : 0,5259 [2]	66, 16	(011)		Negri

(1) $\bar{2}01 : \bar{1}10 = 59°,54'$; $001 : \bar{2}01 = 81°,12'$; $110 : 001 = 76°,57'$ (angoli fondamentali).

(2) $0,5259 \times 8 = 4,2072$, valore quasi preciso al corrispondente dell'acido benzoico.

« Dopo questi risultati doveva sorgere naturalmente la questione se le anomalie crioscopiche di cui è stato fatto parola sono realmente determinate dalla formazione di soluzione solida.

« È ben vero che già van't Hoff ha citato esempî dai quali si rileva, che l'attitudine dei corpi di sciogliersi reciprocamente allo stato solido, non porta sempre con sè la necessità che vi sia tra i corpi stessi analogia nella forma cristallografica (vedi Zeitschrift für physikal. Chem. vol. V, pag. 324). D'altra parte, volendo escludere la formazione di soluzione solida, non sarebbe agevole trovare un' altra spiegazione dell' anomalia presentata dai due acidi ossibenzoici e dai due amminobenzoici sciolti nel benzoico. Di fatto, non sarebbe logico ritenere tale anomalia dovuta alla incompleta dissociazione delle molecole complesse in quelle semplici, poichè è noto che tutti gli acidi sciolti in altri acidi, perdono la proprietà ch' essi hanno, comune con molti corpi ossidrilati, di formare, sciolti negli idrocarburi, delle molecole complesse. Inoltre volendo ammettere quest'ultima spiegazione del fenomeno, la quale fa dipendere l' anomalia dalla funzione chimica del corpo sciolto, non si comprenderebbe perchè vi debba essere diversità di comportamento crioscopico tra l'*orto*, il *meta* e il *para* ossiacido. Laddove, ritenendo l'anomalia come prodotta dalla cristallizzazione del corpo sciolto con il solvente, la quale dipende dalla costituzione chimica dei corpi, si può intendere come nei tre differenti isomeri la diversa struttura porti come conseguenza un diverso comportamento crioscopico. Si può poi spiegare il fatto che l'acido metaossibenzoico sia più anormale del salicilico, osservando come il primo abbia punto di fusione più elevato del secondo, circostanza questa che tende ad aumentare la concentrazione della soluzione solida separantesi; e quanto all'acido paraossibenzoico devesi osservare, che anche in altri casi i paraderivati si sono dimostrati meno anormali degli altri isomeri.

« Queste considerazioni, se avvalorano la tesi che attribuisce alla formazione di soluzione solida la causa delle citate anomalie, non rendono però superflua una diretta dimostrazione di essa; ed anzi della necessità di tale dimostrazione mi sono convinto anche di più in seguito alle obbiezioni rivoltemi recentemente dal prof. Paternò (1) a proposito di queste mie ricerche.

« Di tutte le sostanze delle quali Negri fece lo studio cristallografico comparativo, più si raccomandano gli acidi ossibenzoici per la spiccata anomalia che presentano nel congelamento. Perciò per dare la dimostrazione sperimentale ora accennata, ho scelto la soluzione benzoica di acido salicilico; questo composto del resto è il solo che si possa determinare quantitativamente con sufficiente esattezza, col metodo colorimetrico.

« Il ricercare se nei cristalli separantisi da una soluzione in via di congelamento si abbia o meno soluzione solida, non è quesito facile: e nel caso

(1) Gazz. chimica, vol. XXV, parte I, pag. 411.

speciale, che più mi interessava, il problema era complicato ancora dalla elevata temperatura di fusione di tali sostanze, dalla loro facile volatilizzazione e sopratutto dalla difficoltà di determinarli quantitativamente con esattezza.

« Per risolvere il problema a proposito delle soluzioni benzoiche di acido salicilico io ho seguito il metodo adottato da A. van Bijlert [1], ch' io, con qualche modificazione, avevo già applicato a proposito delle soluzioni naftaliche di indolo e fenantreniche di carbazolo. Lo stesso metodo fu seguito recentemente da Beckmann [2] per dimostrare che il jodio forma col benzolo una soluzione solida.

« Per separare dall'acqua madre i primi cristalli, mi sono servito dell'apparecchio costrutto all'uopo e descritto da tempo [3].

« Non ho potuto impiegare l'apparecchio ultimamente proposto da Beckmann, il quale del resto non differisce essenzialmente dal mio, perchè esso richiede l'uso di una centrifuga: ed io dovevo operare a temperature superiori a 100°.

« Il principio al quale Bijlert ricorse per risolvere il problema è, come è noto, il seguente. Alla soluzione in esame si aggiunge una terza sostanza avente comportamento crioscopico normale, e che quindi non cristallizza con il solvente. Si eseguisce poi l'analisi quantitativa dei cristalli che si separano; la proporzione di sostanza normale, che in essi si trova, determina la quantità di acqua madre trattenuta meccanicamente dalla massa cristallina. Pertanto dalla quantità totale di sostanza anomala che in questa si riscontra, basta sottrarre quella che spetta all'acqua madre trattenuta in essa, per sapere se, e quanta di essa, entra come costituente dei cristalli in forma di soluzione solida.

« Per le soluzioni di acido salicilico in benzoico ho scelto come sostanza normale dapprima la difenilammina e poi l'antracene, che riconobbi potersi dosare più esattamente.

« Ho operato come segue: La mescolanza delle tre sostanze, fatta in proporzioni note, veniva introdotta nell' apparecchio per separare i cristalli in quantità di 25 a 30 grammi circa, e fatta fondere scaldando convenientemente l'apparecchio in bagno di glicerina. Poi si lasciava raffreddare lentamente, e manovrando l'agitatore di platino contenuto nella massa fusa, se ne otteneva il raffreddamento omogeneo e la parziale congelazione. Non appena giudicavo essersi separato dal liquido circa un grammo di cristalli, sollevavo il tappo di vetro, mettendo contemporaneamente in azione l'aspiratore. Sulla reticella di platino rimane la massa cristallina. Questa si toglie dalla reticella scio-

[1] Zeitschrift für physikal. Chemie, vol. VIII, pag. 343.
[2] Zeitschrift für physikal. Chemie, vol. XVII, pag. 107.
[3] Gazzetta chimica, anno XXII, parte II, pag. 261.

gliendola in puro etere: la soluzione eterea viene evaporata in cassula tarata e il residuo pesato. Così si conosce la quantità di massa cristallina separatasi. Ad essa aggiungevo la quantità di soluzione di potassa caustica normale, necessaria per neutralizzare un peso di acido benzoico pari a quello della massa cristallina, diluivo con un po' d' acqua, riscaldavo dolcemente e poi, dopo raffreddamento, filtravo. Sul filtro rimane la difenilammina o l'antracene; cioè la sostanza impiegata come corpo normale.

« Al liquido filtrato aggiungevo tanti centimetri cubici di acido solforico normale quanti furono quelli di potassa impiegati, e poscia portavo ad un volume noto (ad un litro o a mezzo, a seconda dei casi). In questo liquido si determina l'acido salicilico aggiungendo ad una porzione aliquota di esso, la quantità di soluzione neutra e diluita di cloruro ferrico necessaria per avere il massimo di colorazione violetta, determinata con esperienze preliminari. Pel confronto serve una soluzione acquosa di acido salicilico contenente gr. 0,1 di questo acido e tanto acido benzoico, quanto presso a poco se ne trova nelle soluzioni di ricerca. Aggiungendo ad essa l'identica quantità di cloruro ferrico, si ottiene un liquido di confronto che è nelle stesse condizioni di quello ove trattasi di determinare l'acido salicilico: ed il confronto delle colorazioni a mezzo del colorimetro Houton-Labillardière, riesce allora con grande esattezza.

« Per comprovare la bontà del metodo ho assoggettato al trattamento ora descritto miscele fatte in proporzioni conosciute di acido benzoico, acido salicilico e difenilammina, e sopratutto delle due prime sostanze con antracene. La determinazione dell'acido salicilico da dato i seguenti risultati:

	Acido salicilico impiegato	Acido salicilico trovato
I.	0,2920	0,2900
II.	0,1885	0,1850

Quella della difenilammina non riuscì sempre con sufficiente esattezza, ma si ebbero parecchie volte perdite non trascurabili, forse perchè questo corpo si altera facilmente. Invece la determinazione dell' antracene ha dato sempre risultati soddisfacenti:

	Antracene impiegato	Antracene trovato
I.	0,0728	0,0694
II.	0,0920	0,0908
III.	0,1215	0,1195

Ma per potere impiegare l'antracene come « *sostanza normale* » era d'uopo conoscerne il comportamento crioscopico in soluzione di acido benzoico. Ora io ho constatato ch'esso era normale, con le seguenti determinazioni:

Solvente: *Acido benzoico*. Depressione mol. costante = 78,5
Corpo sciolto: *Antracene*, $C_{14}H_{10} = 178$

Concentrazione	Abbassamento termometrico	Peso molecolare
1,4864	0°,69	169,1
2,5020	1°,12	175,3

« Ciò premesso, riporto in succinto i risultati delle cinque esperienze che io ho eseguite, le quali tutte, come si vedrà, concordano nell'affermare che realmente le soluzioni benzoiche di acido salicilico congelanrdo danno origine alla separazione di soluzione solida. Meritano maggior fiducia, tra esse, le ultime tre nelle quali si impiegò come sostanza normale l'antracene. La prima esperienza, causa la difficoltà summentovata di dosare la difenilammina, doveva necessariamente fornire un risultato superiore a quello delle ultime.

I. Esperienza.

« Composizione della miscela:

Acido benzoico	gr.	18,14	pari a	90,18	p. cto.
» salicilico	»	1,213	» »	6,03	»
Difenilammina	»	0,7635	» »	3,79	»
		20,1165		100,00	

Peso della massa cristallina separata gr. 0,42. In 100 parti di essa si trovò:

Acido salicilico 5,28
Difenilammina 2,40

A 2,40 p. cto. di difenilammina corrisponde 9,81 p. cto. di acido salicilico appartenente all' acqua madre trattenuta dai cristalli. La quantità di acido salicilico, che entra nei cristalli allo stato di soluzione solida è quindi di 5,28 — 3,88 = *1,47*. Cioè su 100 parti di acido salicilico contenute nella miscela, se ne separano *24,30* come soluzione solida.

II. Esperienza.

« Composizione della miscela:

Acido benzoico	gr.	25,54	pari a	82,70	p. cto.
» salicilico	»	2,67	» »	8,65	»
Difenilammina	»	2,67	» »	8,65	»
		30,88		100,00	

Peso della massa cristallina separata gr. 0,944. In 100 parti di essa si trovò:

Acido salicilico 7,84

La determinazione della difenilammina fallì completamente.

« Ho voluto comunicare quasta seconda determinazione benchè incompleta, perchè anch'essa ha qualche valore dimostrativo. Di fatto, la quantità di acido salicilico trovata nella massa cristallina è, proporzionatamente alla concentrazione della miscela, quasi uguale a quella trovata nella prima esperienza.

III. Esperienza.

« Composizione della miscela:

Acido benzoico	gr.	20,96	pari a	80,70	p. cto.
» salicilico	»	2,5110	» »	9,67	»
Antracene	»	2,5035	» »	9,63	»
		25,9745		100,00	

Peso della massa cristallina separata: gr. 0,870. In 100 parti di essa si trovò:

Acido salicilico	8,95
Antracene	7,06

L'acido salicilico chc è nei cristalli come soluzione solida è quindi uguale a 8,95 — 7,06 = *1,89*. Cioè su 100 parti di acido salicilico contenute nella miscela se ne separano *19,54* come soluzione solida.

IV. Esperienza.

« Composizione della miscela:

Acido benzoico	gr.	20,10	pari	a	88,80	p. cto.
» salicilico	»	1,12	»	»	5,60	»
Antracene	»	1,12	»	»	5,60	»
		22,34			100,00	

Peso della massa cristallina separata: gr. 1,1450. In 100 parti di essa sonvi di:

Acido salicilico	4,90
Antracene	3,9368

L'acido salicilico allo stato di soluzione solida sarà uguale a:

$$4,90 - 3,9368 = 0,9632$$

Cioè su 100 parti di acido contenute nella miscela se ne separano come soluzione solida parti *17,20*.

V. Esperienza.

« Composizione della miscela:

Acido benzoico	gr.	24,50	pari	a	84,98	p. cto.
» salicilico	»	1,84	»	»	7,51	»
Antracene	»	1,84	»	»	7,51	»
		28,18			100,00	

Massa cristallina separata: gr. 1,2210. In 100 parti di essa trovai:

Acido salicilico	6,62
Antracene	5,38

Acido salicilico allo stato di soluzione solida, uguale a 6,62 — 5,38 = *1,24*. Cioè su 100 parti se ne separano *16,60* come soluzione solida.

Riassunto delle cinque esperienze.

« Concentrazione dell'acido salicilico nella soluzione primitiva:

I.	II.	III.	IV.	V.
6,03 %	8,65 %	9,67 %	5,60 %	7,51 %

« Concentrazione dell'acido salicilico nella soluzione solida:

1,47	—	1,89	0,9632	1,24

Su 100 parti di acido salicilico disciolto se ne separano:

24,30	—	19,54	17,20	16,60

« Con tali esperienze ritengo di avere provato, che l'acido salicilico cristallizza in parte col benzoico quando si fa congelare una soluzione formata da questi due corpi. Dunque a tale causa devesi attribuire il comportamento crioscopico anormale delle soluzioni benzoiche di acido salicilico: e lo stesso fatto si può ritenere come dimostrato per l'acido metaossibenzoico, anche più anormale dell' isomero, forse perchè il suo punto di fusione più elevato, ne induce la separazione con il solvente in proporzione maggiore.

« Le numerose anomalie crioscopiche da me finora osservate, e dipendenti da analogia di costituzione tra corpo disciolto e solvente, possono essere attribuite alla formazione di soluzione solida anche quando tra la forma cristallina delle sostanze in questione non esistono delle relazioni di isomorfismo ».

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario Blaserna presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando tra queste il vol. VI delle *Opere di Cristiano Huygens* inviato dalla Società olandese delle scienze di Amsterdam, e una *Relazione sulla esplorazione dell'altipiano centrale del Brasile.*

Il Socio Cremona presenta, a nome dell'autore ing. Lorenzo Allievi, una pubblicazione intitolata: *Cinematica della biella piana*, e accompagna la presentazione colle seguenti parole:

« La monografia dell'ing. L. Allievi ha per oggetto lo studio del movimento piano di una figura (tipo elementare il quadrilatero articolato) della quale due punti siano guidati secondo circoli e secondo rette. L'autore, giovandosi con molta sagacia dei metodi della geometria differenziale e della geometria projettiva, mostra come i pochi meccanismi conosciuti e ideati dall'empirismo non sono che soluzioni particolari di problemi che ne ammettono infinite altre, che l'autore determina e che sono pur esse suscettibili di pratiche applicazioni. È uno studio di grande originalità e importante non solo per la costruzione scientifica delle macchine, ma anche per la geometria cinematica; e merita perciò l'attenzione degli uomini di scienza e dei pratici ».

Il Socio Tacchini offre i primi sei fascicoli pubblicati dalla Società sismologica italiana.

CORRISPONDENZA

Il Segretario Blaserna dà conto della corrispondenza relativa al cambio degli Atti.

Annunciarono l' invio delle proprie pubblicazioni:

La R. Accademia delle scienze di Cracovia; la Società geologica di Freiberg; la R. Biblioteca di 'S. Gravenhage; la Scuola politecnica di Berna.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA
nella seduta del 1° dicembre 1895.

Bianchedi G. — I disastri ferroviarî ed i mezzi atti ad evitarli. Firenze, 1895. 8°.

Commission d'exploration du Plateau Central du Brasil. Rapport présenté à S. E. le Ministre de l'industrie & par L. Cruls. Testo e atlante. Rio de Janeiro, 1894. 4°.

Copeland R. — On the new Star in the Constellation Auriga together with Observations of the same by L. Becker. Edinburgh, 1892. 4°.

Graebe C. e *Schestakow P.* — Ueber Biphenylmethylolid (Lacton der o-Oxydiphenyl-o- Carbonsäure. Leipzig, 1895. 8°.

Gosio B. — Cemento, terra cotta e grès come materiali di tubatura per le acque potabili (Ministero dell'Interno). Roma, 1895. 4°.

Huygens Chr. — Oeuvres Complètes, publiées par la Société hollandaise des Sciences de Amsterdam. La Haye, 1895. 4°.

Raina M. — Sull'apparato esaminatore di livelle costruito dal sig. L. Milani nel 1889 per il R. Osservatorio astronomico di Milano. Milano, 1895. 8°.

Regolamento per la sanità marittima approvato con r. Decreto 29 settembre 1895, n. 636. Roma, 1895. 4°.

Rizzo G. B. — Sull'estensione della legge di Kirchhoff intorno alla relazione fra l'assorbimento e l'emissione della luce. Torino, 1894. 8°.

Sandrucci A. — Le teorie su l'efflusso dei gas e gli esperimenti. Firenze, 1895. 8°.

Sclao A. — Sulla preparazione del siero anticarbonchioso. Roma, 1895. 4°.

Simone G. de. — Addizione all'opuscolo intitolato Zoofitogenia o generazione animale-vegetale dei Moscherini del Caprifico. Andria, 1895. 8°.

Sul modo di dedurre la media giornaliera delle osservazioni meteorologiche fatte a Torino in tempo medio dell'Europa centrale. Torino, 1895. 8°.

P. B.

RENDICONTI
DELLE SEDUTE
DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.
Seduta del 15 dicembre 1895.
F. Brioschi Presidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Chimica. — *Il veratrol come solvente nelle ricerche crioscopiche* [1]. Nota del Socio E. Paternò.

« L'etere bimetilico della pirocatechina $C_6H_4\begin{smallmatrix}OCH_3\\OCH_3\end{smallmatrix}$ o veratrol si presta abbastanza bene come solvente nelle ricerche crioscopiche. Quello da me adoperato proveniva dalla fabbrica di Kalhbaum di Berlino, e purificato per distillazione e poi per cristallizzazione frazionata, aveva il punto di congelamento a 22°,53.

« Non ho fatto di questo solvente uno studio molto esteso, ma mi sono limitato alle esperienze necessarie per dedurne il comportamento dei composti di varia funzione chimica, al fine cennato nella precedente Nota sul parabromotoluene.

« I risultati ottenuti sono stati i seguenti:

1. *Benzina.*

N. d'ord.	concentr.	abbas. termom.	coeffic. abbassam.	abbassam. molecolare.
1	0,6970	0,59	0,846	65,99
2	1,7648	1,42	0,804	62,71
3	2,7843	2,17	0,775	60,45
4	3,6788	2,80	0,761	59,36
5	5,2825	4,025	0,761	59,36
6	7,0686	5,165	0,730	56,94
7	9,8277	7,06	0,718	56,00
8	13,7121	9,38	0,684	53,36

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico della R. Università di Roma.

2. *Paraxilene.*

N. d'ord.	concentr.	abbass. termom.	coeffic. abbassam.	abbassam. molecolare.
9	0,689	0,49	0,711	75,38
10	1,909	1,17	0,613	64,96
11	4,273	2,53	0,592	62,76
12	8,085	4,51	0,558	59,12
13	11,619	6,30	0,542	57,47
14	15,921	8,07	0,506	53,73
15	21,308	10,13	0,475	50,39
16	25,506	11,76	0,461	48,87
17	30,768	13,37	0,434	46,06
18	52,873	21,67	0,409	43,44

3. *Bromotoluene.*

N. d'ord.	concentr.	abbass. termom.	coeffic. abbassam.	abbassam. molecolare.
19	1,469	0,59	0,401	68,68
20	5,970	2,27	0,380	65,02
21	10,512	3,83	0,364	62,30
22	17,468	6,00	0,343	58,73
23	32,122	9,27	0,288	49,35
24	41,122	12,31	0,299	51,19
25	52,471	14,89	0,283	48,52

4. *Tiofene.*

N. d'ord.	concentr.	abbass. termom.	coeffic. abbassam.	abbassam. molecolare.
26	0,8460	0,56	0,6619	55,60
27	2,0413	1,45	0,7103	59,66
28	3,1287	2,31	0,738	62,01
29	4,2827	3,21	0,7495	62,96
30	7,2804	5,42	0,7444	62,96
31	10,7332	7,66	0,7136	59,94
32	18,0158	12,14	0,5628	47,28

5. *Anilina.*

N. d'ord.	concentr.	abbass. termom.	coeffic. abbassam.	abbassam. molecolare.
33	1,1448	0,80	0,6988	64,99
34	2,2997	1,66	0,7218	67,13
35	3,4693	2,74	0,7897	73,45
36	4,5894	3,57	0,7778	72,34
37	8,0316	5,72	0,7120	66,23
38	13,3336	9,16	0,6869	63,89
39	17,1924	11,92	0,6930	64,48

6. *Piridina.*

N. d'ord.	concentr.	abbass. termom.	coeffic. abbassam.	abbassam. molecolare.
40	0,8904	0,71	0,7974	62,99
41	2,0243	1,50	0,7409	58,53
42	5,8287	2,72	0,7104	56,12
43	8,4137	5,70	0,6788	53,63
44	12,7752	8,12	0,6356	50,21
45	17,6906	10,80	0,6104	48,22
46	21,2200	13,62	0,5947	46,98

7. *Alcool etilico.*

N. d'ord.	concentr.	abbass. termom.	coeffic. abbassam.	abbassam. molecolare.
47	0,5365	0,66	1,232	56,68
48	1,2339	1,44	1,167	53,68
49	2,2626	2,50	1,104	50,82
50	4,3597	4,69	1,075	49,48
51	6,6411	6,30	0,9486	43,63
52	9,9628	7,84	0,7869	36,19
53	13,6531	9,32	0,6826	31,40
54	17,8145	10,52	0,5905	27,16
55	23,8911	11,80	0,4999	22,72

8. *Etere bietilico della glicerina.*

N. d'ord.	concentr.	abbass. termom.	coeffic. abbassam.	abbassam. molecolare.
56	0,5970	0,285	0,4773	70,65
57	1,2949	0,57	0,4400	65,14
58	2,0960	0,89	0,4246	62,84
59	3,2526	1,33	0.4089	60,51
60	5,6010	2,18	0,3890	57,60
61	9,1763	3,30	0,3597	53,24
62	22,3459	6,68	0,2989	44,24
63	37,3110	9,79	0,2620	38,83

9. *Alcool benzoico.*

N. d'ord.	concentr.	abbass. termom.	coeffic. abbassam.	abbassam. molecolare.
64	0,6064	0,36	0,593	64,04
65	1,8380	1,11	0,603	65,12
66	3,8115	2,14	0,561	60,59
67	5,7355	3,08	0,536	57,89
68	7,8778	4,11	0,521	56,27
69	10,0038	5,61	0,557	60,15
70	13,0064	7,68	0,471	50,87
71	16,2797	7,96	0,484	52,70
72	21,0059	8,68	0,412	44,49

10. *Fenol.*

N. d'ord.	concentr.	abbass. termom.	coeffic. abbassam.	abbassam. molecolare.
73	1,7490	1,34	0,766	72,018
74	3,7180	2,64	0,710	66,74
75	12,203	8,31	0,681	64,01
76	16,926	11,64	0,730	68,70
77	20,732	14,82	0,715	67,19
78	27,000	20,06	0,744	69,90
79	31,656	22,64	0,715	67,31

11. *Timol.*

N. d'ord.	concentr.	abbass. termom.	coeffic. abbassam.	abbassam. molecolare.
80	0,548	0,25	0,456	68,40
81	1,124	0,48	0,427	64,05
82	2,463	1,08	0,438	65,70
83	4,845	2,00	0,413	61,95
84	13,564	5,71	0,421	63,15
85	21,930	9,10	0,414	62,10
86	40,482	17,15	0,423	63,45

12. *Acido acetico.*

N. d'ord.	concentr.	abbass. termom.	coeffic. abbassam.	abbassam. molecolare.
87	0,3500	0,31	0,8857	53,14
88	0,9424	0,84	0,8913	53,48
89	2,0015	1,72	0,8593	51,56
90	3,3703	2,73	0,8100	48,60
91	5,6108	4,28	0,7628	45,76
92	8,2676	5,90	0,7136	42,81
93	11,6435	7,65	0,6570	39,42
94	19,4870	11,10	0,5696	34,17

13. *Acido valerianico.*

N. d'ord.	concentr.	abbass. termom.	coeffic. abbassam.	abbassam. molecolare.
95	0,505	0,30	0,594	60,59
96	1,012	0,63	0,622	63,44
97	1,788	1,11	0,621	63,34
98	3,771	1,95	0,517	52,83
99	6,092	3,01	0.494	50,39
100	9,927	4,59	0,462	47,12
101	19,234	7,44	0,368	37,54
102	40,941	12,45	0,304	31,01

« Nei risultati che precedono, la prima cosa che colpisce si è, che sebbene gli eteri dei fenoli abbiano ordinariamente un comportamento chimico molto simile agli idrocarburi, purtuttavia nel comportamento crioscopico del veratrol non si ha nessuna analogia con quello della benzina, p. xilene, bromotoluene ed in generale con gli idrocarburi ed i loro prodotti di sostituzione nitrati o alogenati (nitrobenzina, bromuro di etilene, bromoformio). In generale può dirsi che nel veratrol tutte le sostanze di varia funzione chimica hanno un comportamento eguale, e che perciò dobbiamo considerare come normale.

« È poi notevole anche il fatto che l'anilina, il fenol ed il timol hanno un comportamento eccezionalmente costante col variare della concentrazione, e si comportano in modo più regolare degli stessi idrocarburi.

« Fra i solventi finora studiati, il veratrol presenta senza dubbio un' analogia di comportamento col benzofenone esaminato da Eykmann [1] e l'acetofenone studiato da Garelli e Montanari [2], per quanto è possibile di giudicare dalle poche esperienze conosciute specialmente pel benzofenone.

« È noto che Lespieau [3] adoperando l'acido solforico monoidrato come solvente, ha osservato che non bisogna fare la lettura del termometro dopo una rapida agitazione, perchè l'agitazione, produce un abbassamento della temperatura segnata; sospesa l'agitazione il termometro sale e si ferma per un tempo abbastanza lungo, ma riabbassa se si agita nuovamente per risalire poi alla temperatura primitiva se di nuovo si sospende. Lo stesso fenomeno hanno osservato Kunster per talune soluzioni acquose [4], Garelli e Montanari per le soluzioni nell'acetofenone. In modo perfettamente analogo si comporta il veratrol; onde per avere determinazioni precise bisogna sospendere l'agitazione appena comincia la cristallizzazione del solvente; è pure utile, dopo un istante di riposo, agitare ancora per qualche secondo, con che la temperatura che per effetto della nuova agitazione si era riabbassata, sale più rapidamente al suo massimo. Così p. es. nelle determinazioni con acido valerianico, in una esperienza nella quale la solidificazione cominciò a 17°,35, sospesa l'agitazione il termometro salì lentissimamente a 17°,41; agitando allora per un istante, discese nuovamente a 17°,35, ma cessando l'agitazione salì rapidamente a 17°,92; questo andamento l'ho potuto osservare parecchie volte.

« In quanto alla costante da scegliere per la depressione molecolare nel veratrol, dalle esperienze riportate si ricavano i seguenti dati:

(1) Zeitschrift Phys. Chemie, t. IV, p. 504.
(2) Gazzetta Chimica, XXIV, II, p. 244.
(3) Zeitschrift Phys. Chemie, t. XIII, p. 450.
(4) Bulletin de la Société Chimique, t. XI, p. 72, 1894.

			media
Benzina	esperienze	n. 1 a 5	61,57
P. xilene	"	" 10 a 11	63,86
P. bromotoluene	"	" 19 a 21	63,33
Tiofene	"	" 26 a 30	60,06
Anilina	"	" 33 a 36	69,48
Etere della glicerina	"	" 56 a 60	61,66
Alcool benzoico	"	" 64 a 66	63,25
Fenol	"	" 73 a 79	66,74
Timol	"	" 80 a 86	64,11
Acido valerianico	"	" 96 a 97	63,79
		Media generale	63,78

« E però si può provvisoriamente scegliere quale costante dell'abbassamento molecolare nel veratrol il numero 64. Non essendo conosciuto il calorico latente di fusione del veratrol, manca la possibilità del controllo con la formola di van 't Hoff. Calcolando con la regola empirica di Raoult, cioè moltiplicando il peso molecolare del veratrol per la costante 0,62 si ottiene il numero 85,56 che molto si allontana da quello trovato sperimentalmente.

« Prima di porre fine a questa Nota mi si permetta di richiamare l'attenzione sopra un fatto che è finora sfuggito a quei chimici, che studiando la legge di Raoult hanno voluto trovar la causa di molte anomalie nella formazione di soluzioni solide e nella analogia fra la costituzione del solvente e quella della sostanza disciolta. Senza togliere alcun valore alle osservazioni ed alle considerazioni fatte, delle quali talune particolarmente sono della massima importanza, è un fatto che la solubilità relativa della sostanza disciolta e del solvente debba essere causa di comportamento anomalo in molti casi pei quali l'origine dell'anomalia si è ricercata altrove. Nei casi in cui vi è grande differenza fra il punto di fusione del solvente e della sostanza disciolta, il fenomeno è difficile che sfugga; così per le soluzioni di acido salicilico in benzina, da me studiate nel 1889, si constata subito il punto di saturazione oltre il quale la temperatura di congelamento del miscuglio non si abbassa più, e si separa invece insieme al solvente la sostanza disciolta. Ma nei casi nei quali questa differenza notevole non esiste, il fenomeno può sfuggire, come è sfuggito a me parecchie volte e forse anche ad altri, ed allora da un lato la separazione della sostanza insieme al solvente è dovuta alla saturazione, e dall'altro lato le determinazioni fatte sono relative a miscugli molto complessi. Un esempio spiegherà meglio il mio concetto. Sono state fatte numerose esperienze crioscopiche coi miscugli di acido acetico e benzina. Ora da esperienze di Duclaux [1] è noto che un

[1] Annales de Chimie et de Physique, 5e série, t. VII, p. 264, 1876.

miscuglio a volumi eguali di queste due sostanze, che è perfettamente omogenea alla temperatura di 15°-20°, s'intorbida e si separa in due strati alla temperatura di 11°, e di questi due strati quello superiore contiene il 33,3 % di acido acetico, quello inferiore invece il 63,5. È evidente che in questo caso nelle varie determinazioni crioscopiche, che si sono fatte, si è dovuto separare cristallizzato in molti casi un miscuglio di acido acetico e di benzina, senza che si sia formata per ciò soluzione solida e senza analogia di composizione chimica fra le due sostanze. La temperatura osservata in questi casi è stata senza dubbio la media della temperatura di congelamento dei due miscugli di acido acetico e benzina che compongono l'intera massa.

« Ritornerò fra breve su questo importante argomento che ho voluto per ora soltanto accennare di volo ».

Matematica. — *Sulle irrazionalità da cui può dipendere la risoluzione di un'equazione algebrica $f(x\,y\,z)=o$, mediante funzioni razionali di due parametri.* Nota di F. Enriques, presentata dal Socio Cremona.

« 1. Se $f(xy)=o$ è un' equazione di genere o, essa può *risolversi* ponendo x, y funzioni razionali d'un parametro t colle formule

$$(1) \qquad x=\varphi_1(t) \qquad y=\varphi_2(t).$$

« Le funzioni razionali φ_1 φ_2 possono contenere delle irrazionalità nei coefficienti, e si può porre la questione di assegnare le irrazionalità più semplici che occorre introdurre per effettuare la risoluzione della $f=o$ colle formule (1), considerato come *campo di razionalità* (nel senso di Kronecker) quello dato dai coefficienti del polinomio f.

« A tale questione ha risposto il sig. Noether (Mathem. Annalen, Bd. III) dimostrando che « *nella risoluzione di una equazione di genere o* $f(xy)=o$ *mediante funzioni razionali d'un parametro occorre* (al più) *di estrarre un radicale quadratico* ».

« Io ho preso in esame la questione analoga relativa alle equazioni in 3 variabili

$$f(x\,y\,z)=o.$$

Supposto che una tale equazione (sia quella d'una superficie razionale, ossia) possa risolversi mediante funzioni razionali di due parametri [1] colle formule

$$(2) \qquad x=\varphi_1(uv) \quad y=\varphi_2(uv) \quad z=\varphi_3(uv),$$

[1] E ciò si può ormai riconoscere dall'annullarsi di certi caratteri invariantivi (genere geometrico e numerico e bigenere) dell'equazione, come si vedrà stabilito in un lavoro del sig. Castelnuovo.

si vuole « assegnare le irrazionalità più semplici (che debbono comparire nei coefficienti di φ_1 φ_2 φ_3) da cui può farsi dipendere la effettiva risoluzione anzidetta ».

« Mi limiterò in questa Nota ad enunciare i principali resultati ottenuti, rimandando ad un altro lavoro per le dimostrazioni diffuse e per la bibliografia.

« Anzitutto debbo fare una osservazione.

« Allorchè la $f(x\,y\,z)=o$ è risolubile colle formule (2) si può sempre esprimere x, y, z mediante funzioni razionali di due parametri con *invertibilità*, cioè in modo che questi parametri risultino alla lor volta funzioni razionali di $x\,y\,z$ (Castelnuovo); ma tale condizione (verificata per la risoluzione più generale) può non esser soddisfatta da una particolare risoluzione (2) della $f=o$.

« In tal caso per passare dalla (2) ad una risoluzione della $f=o$ mediante funzioni razionali invertibili di due parametri, occorrerà in generale introdurre nuove irrazionalità. Perciò il problema proposto comporta una soluzione più semplice se si vuole una risoluzione mediante funzioni razionali dell'equazione $f=o$ senza imporre la condizione di invertibilità.

« Io tratto la questione imponendo la condizione d'invertibilità anzidetta, e faccio soltanto cenno d'una semplificazione che può aversi in un punto ove si prescinda da quella condizione.

« Ecco il resultato ottenuto:

« *La risoluzione dell'equazione*

$$f(x\,y\,z)=0$$

mediante funzioni razionali invertibili di due parametri (supposta possibile) *può sempre effettuarsi con operazioni razionali (di eliminazione), con estrazioni di radicali quadratici e cubici e colla risoluzione di una delle equazioni per la bisezione dell'argomento*:

1) *delle funzioni abeliane di genere* 3;

2) *o delle funzioni abeliane di genere* 4;

3) *o delle funzioni iperellittiche di genere* p $(p=1, 2\ldots)$.

« È superfluo avvertire che insieme ai tipi menzionati di equazioni debbono considerarsi i loro casi di degenerazione.

« *Allorchè la risoluzione dell'equazione*

$$f(x\,y\,z)=o$$

mediante funzioni razionali invertibili di due parametri viene a dipendere dall'equazione 1), *si può ottenere una risoluzione di essa mediante funzioni razionali* n o n i n v e r t i b i l i, *con sole estrazionidi radicali quadratici e cubici.*

« 2. Un cenno della dimostrazione. Il concetto fondamentale consiste nel trasformare successivamente la superficie razionale

$$f(x\,y\,z) = o$$

(supposta d'ordine n a sezioni non iperellittiche di genere > 2) mediante i polinomi d'ordine $n - 3$ *aggiunti* ad f. Si ha così un procedimento di esaustione che ricorre frequentemente in varie questioni nei recenti lavori del sig. Castelnuovo e miei.

« Questo procedimento completato con qualche osservazione complementare, permette di trasformare ogni superficie razionale senza l'aggiunta di irrazionalità numeriche (cioè *razionalmente*) in una delle seguenti:

I) superficie a sezioni razionali (rigata o superficie di Steiner del 4° ordine);

II) superficie a sezioni ellittiche (d'ordine $n \leq 9$), incluso il piano doppio con quartica limite C_4 ($n = 2$);

III) piano doppio con sestica limite C_6 dotata di due punti tripli infinitamente vicini, o cono quadrico doppio con sestica limite sezione d'una superficie cubica (che con proiezione da un punto si riduce al nominato piano doppio);

IV) superficie con un fascio (razionale) di coniche.

« Si possono distribuire sotto questo aspetto le superficie razionali in quattro famiglie, ma quelle della famiglia II) dànno luogo a più classi.

« I. Nel caso I) si ha la rappresentazione piana della superficie (risoluzione razionale dell'equazione $f = o$ con invertibilità), o razionalmente, o colla semplice estrazione d'un radicale quadratico.

« II. Nel caso II) si hanno da considerare le superficie di tutti gli ordini $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Ma per $n = 2$ (piano doppio con quartica limite) la questione è risoluta (Clebsch) e si sa appunto che basta determinare le tangenti doppie della quartica limite, ciò che porta alla bisezione dell'argomento delle funzioni abeliane di genere 3.

« Per $n = 3$ la questione si collega allo studio della configurazione delle rette della superficie di 3° ordine, e si riporta alla precedente (Geiser) per proiezione da un punto (risoluzione d'un'equazione di 3° grado).

« Per $n = 4$ si ha la superficie del 4° ordine con conica doppia che per proiezione da un punto della conica (estrazione d'un radicale quadratico) si rappresenta sul piano doppio con quartica limite, onde ecc.

« Per $n = 5$ la superficie ha una curva doppia del 5° ordine con punto triplo (Caporali) dal quale viene proiettata (razionalmente) sul piano doppio con quartica limite.

« Così ai casi $n = 2, 3, 4, 5$ corrisponde il caso 1) dell'enunciato del § precedente. Ma fondandosi su un procedimento del sig. Castelnuovo (Acc.

dei Lincei) si può in tutti questi casi rappresentare razionalmente la superficie sopra una involuzione piana, allorchè è dato un punto.

« Per $n = 7, 8$ si può dar sempre razionalmente la rappresentazione piana della superficie.

« Restano da esaminare i casi $n = 6$, $n = 9$ nei quali la questione si riconduce alla determinazione di un punto qualsiasi della superficie (perchè le corrispondenti superficie normali d'ordine 6, 8 rispettivamente in S_6 S_9 vengono proiettate da un piano tangente in superficie a sezioni razionali). Ciò sembrerebbe importare la risoluzione di equazioni del 6° e del 9° grado, ma il problema si può ridurre mediante speciali considerazioni alla risoluzione di un'equazione di 3° e una di 2° grado nel primo caso, ed alla risoluzione di un'equazione di 4° e di una di 3° grado nel secondo caso.

« Per $n = 6$, $n = 9$, si ha dunque la rappresentazione piana della corrispondente superficie, effettuando soltanto estrazioni di radicali quadratici e cubici.

« III. Nel caso III) la rappresentazione del piano doppio con sestica limite C_6 con 2 punti 3pli infinitamente vicini sul piano semplice, è data dal sig. Noether mediante la determinazione delle coniche tritangenti a C_6 passanti pei suoi due punti tripli (equazione per la bisezione dell'argomento delle funzioni abeliane di genere 4 inerenti a C_6).

« IV. La rappresentazione piana delle superficie con un fascio razionale di coniche è data dal sig. Noether costruendo una unisecante del fascio, con un metodo che non lascia subito vedere da quali irrazionalità dipenda la rappresentazione; ma si può notare che la superficie si rappresenta *razionalmente* (con una conveniente proiezione) sul piano doppio con curva limite C_{2n} d'ordine $2n$ dotata di punto $(2n-2)$plo, ed allora la costruzione di quella unisecante (e quindi la rappresentazione della superficie sul piano semplice) si può far dipendere dalla determinazione di curve aggiunte a C_{2n} che la tocchino in ogni punto ove la segano, e quindi dall'equazione per la bisezione dell'argomento delle funzioni iperellittiche inerenti a C_{2n}.

« 3. Si abbia ora l'equazione in 4 variabili

$$f(x_1\, x_2\, x_3\, x_4) = o$$

e suppongasi che le equazioni

$$f(x_1\, x_2\, x_3\;\, a) = o$$

ottenute dando ad x_4 un valore costante sieno risolubili con funzioni razionali di due parametri; nei coefficienti di queste funzioni entrano in generale delle irrazionalità che vengono a dipendere da x_4.

« I resultati ottenuti (§ 1) ci permettono di precisare la natura di queste irrazionalità. Ma pensando alla riduzione del § 2 si può anche enunciare il teorema:

« *Se le equazioni*

$$f(x_1 x_2 x_3 a) = 0$$

(*dove* a *è una costante arbitraria*) *possono risolversi con funzioni razionali di due parametri, si può sempre risolvere la*

$$f(x_1 x_2 x_3 x_4) = 0$$

ponendo $x_1 x_2 x_3$ *funzioni irrazionali di due parametri* u, v *e di* x_4, *dove la irrazionalità dipende soltanto da estrazioni di radicali quadratici e cubici.*

« Geometricamente (coll'uso di considerazioni complementari) si ha:

« *Se una varietà algebrica* V *di tre dimensioni contiene un fascio lineare di superficie razionali, essa può rappresentarsi punto per punto*

1) *sullo* S_3 *in modo che le immagini delle superficie razionali del fascio sieno i piani per una retta;*

2) *o sullo spazio doppio* (S_3) *con superficie limite* F *d'ordine* $2n$, *in modo che le superficie del fascio su* V *abbiano per immagini i piani* (*doppi*) *passanti per una retta:*

a) $(2n-4)$pla *per* F;

b) *o* $(2n-6)$pla *per* F *contenente due punti* $(2n-3)$pli *infinitamente vicini di* F;

c) *o contenenti un punto* $(2n-2)$plo *per* F;

3) *o sopra una varietà con fascio di sezioni iperpiane normali immagini delle superficie razionali date su* V), *superficie*:

a) *d'ordine* 3 *in* S_3;

b) *o d'ordine* 6 *in* S_6;

c) *o d'ordine* 9 *in* S_9.

« Non è escluso che si possa avere una riduzione ulteriore; ma si può escludere (con esempi) che si possa sempre rappresentare la varietà V su S_3 nel modo 1): ciò lascia impregiudicata la questione della razionalità di V, la quale questione viene risoluta affermativamente solo in alcuni casi.

« 4. Non sarà inutile accennare a riduzioni ulteriori che possono ottenersi in un caso notevole.

Allorchè si possono determinare tre funzioni razionali $x_1 = x_1(x_4)$, $x_2 = x_2(x_4)$, $x_3 = x_3(x_4)$ del parametro x_4, che soddisfino identicamente all'equazione

$$(1) \qquad f(x_1 x_2 x_3 x_4) = 0,$$

si può sempre (nella precedente ipotesi che le equazioni $f(x_1 x_2 x_3 a) = 0$ sieno risolubili per funzioni razionali di due parametri) *risolvere* la (1) ponendo $x_1 x_2 x_3$ funzioni razionali invertibili di due parametri u, v di x_4, e di un radicale $\sqrt{\varphi(u\, v\, x_4)}$ portante sopra un polinomio (di particolar forma)

in u, v, x_4. Si ha infatti in questo caso che la varietà V di equazione (1) possiede una curva unisecante le superficie razionali del fascio

$$f(x_1 x_2 x_3 a) = o,$$

ed allora i casi 3) b), 3) c) del § precedente si riconducono al caso 1), mentre il caso 3) a) si riconduce al caso 2) a).

« È interessante notare che (sebbene non si sappia decidere se sempre potranno determinarsi nel modo anzidetto le funzioni $x_1(x_4)$ $x_2(x_4)$ $x_3(x_4)$ ci troviamo nel caso di applicare l'osservazione precedente, *quando sono risolubili per funzioni razionali di due parametri le equazioni in* x_1 x_2 x_3

$$f(x_1, x_2, x_3, a x_3 + b) = o$$

(*dove* a, b, *sono costanti arbitrarie*): *allora si può (dunque) risolvere l'equazione*

$$f(x_1 x_2 x_3 x_4) = o$$

ponendo x_1 x_2 x_3 *funzioni razionali invertibili di due parametri* u, v, *di* x_4 *e di una* $\sqrt{\varphi(u v x_4)}$, *dove* φ *è un polinomio di 2º grado in* u, *o un polinomio di 4º grado in* u, v, *o un (particolare) polinomio di 6º grado in* u, v.

« D'altra parte nel caso detto innanzi si riesce per altra via, sotto qualche restrizione, a risolvere la

$$f(x_1 x_2 x_3 x_4) = o$$

ponendo x_1 x_2 x_3 x_4 funzioni razionali non invertibili di tre parametri u, v, w.

« Ma lascio per ora di indicare i resultati precisi ottenuti e le successive applicazioni che se ne possono fare al caso in cui sieno risolubili per funzioni razionali tutte le equazioni

$$f(x_1 x_2 x_3 a x_2 + b x_3 + c) = o$$

(a, b, c costanti).

« Come si vede queste ricerche portano un primo, sebbene modesto, contributo alle difficili questioni inerenti alla razionalità delle varietà di tre dimensioni, questioni che non sono state ancora accostate ».

Matematica. — *Sugli integrali delle equazioni differenziali ordinarie considerati come funzioni dei loro valori iniziali.* Nota del dott. ONORATO NICCOLETTI, presentata dal Socio BIANCHI.

« 1. Sia dato un sistema di equazioni differenziali ordinarie:

$$(1) \qquad dx_i = X_i \, dx \qquad (i = 1, 2 \ldots n)$$

dove le X_i sono funzioni delle $n+1$ variabili $x, x_1, \ldots, x_n$, finite e continue in queste variabili, finchè le $x, x_1 \ldots x_n$ variano rispettivamente nei

tratti $(\alpha\beta)$, $(\alpha_1\beta_1)\dots(\alpha_n\beta_n)$ e tali di più, che indicando con $(x, x_1 \dots x_n)$, $(x, x'_1 \dots x'_n)$ due punti del campo ad $n+1$ dimensioni così individuato, corrispondenti al medesimo valore della variabile x, siano soddisfatte le disuguaglianze fondamentali di Lipschitz:

$$(2) \qquad |X_i(x, x'_1 \dots x'_n) - X_i(x, x_1 \dots x_n)| < A \sum_1^n {}_s |x'_s - x_s|$$

dove A è una costante positiva finita.

« In tale ipotesi il metodo di approssimazioni successive del Picard dimostra l'esistenza di n funzioni $x_1, x_2 \dots x_n$ della variabile x, integrali delle (1) e tali che in un punto arbitrario x_0 dell'intervallo $(\alpha\beta)$ prendono valori arbitrarî, $x_1^0 \dots x_n^0$, compresi rispettivamente nei tratti $(\alpha_1\beta_1)\dots(\alpha_n\beta_n)$. Questi valori iniziali $x_1^0 \dots x_n^0$ dai quali, oltrechè dalla variabile x, dipendono gli integrali $x_1 \dots x_n$, sono le n costanti arbitrarie, che figurano nello integrale generale delle equazioni (1).

« È interessante studiare in qual modo dipendano gli integrali così trovati dai loro valori iniziali; e noi dimostreremo innanzi tutto il teorema:

Nelle ipotesi fatte, gli integrali sono funzioni finite e continue dei loro valori iniziali.

« Ricordiamo perciò in breve il metodo di Picard per l'integrazione delle (1). Ponendo:

$$X_i^{(0)} = X_i(x, x_1^0 \dots x_n^0); \quad x_i^{(1)} = x_i^0 + \int_{x_0}^x X_i^{(0)}\, dx$$

e quindi

$$X_i^{(1)} = X_i(x, x_1^{(1)} \dots x_n^{(1)}); \quad x_i^{(2)} = x_i^0 + \int_{x_0}^x X_i^{(1)}\, dx \qquad (\alpha)$$

e in generale

$$X_i^{(k)} = X_i(x, x_1^{(k)} \dots x_n^{(k)}); \; x_i^{(k+1)} = x_i^0 + \int_{x_0}^x X_i^{(k)}\, dx$$

si dimostra che

1° limitando la variabilità di x in un intervallo conveniente $(\gamma\delta)$, interno ad $(\alpha\beta)$ e che comprende x_0 nel suo interno, ciascuno dei punti $(x, x_1^{(k)} \dots x_n^{(k)})$ $(k = 1, 2 \dots)$ che successivamente si ottengono, è interno al campo ad $n+1$ dimensioni, dove le ipotesi fondamentali sulle funzioni X_i sono soddisfatte;

2° le serie

$$(3) \qquad x_i^{(1)} + (x_i^{(2)} - x_i^{(1)}) + \dots + (x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}) + \dots + \dots$$

convergono uniformemente nel campo stesso e rappresentano gli integrali cercati.

« Conviene riportare quest'ultima parte della dimostrazione. Poniamo perciò per brevità $x_0 = 0$ e indichiamo con L il massimo valore assoluto

delle X_i nel campo dato, con $\bar{x}$ il valore assoluto della x. Avremo allora, avendo riguardo alle (2):

$$|x_i^{(1)}-x_i^{(0)}|<L\,\bar{x}\,;\quad |x_i^{(2)}-x_i^{(1)}|<LAn\frac{\bar{x}^2}{1.2}\,;\quad |x_i^{(3)}-x_i^{(2)}|<LA^2n^2\frac{\bar{x}^3}{1.2.3}\cdots$$

e in generale

$$(4)\qquad |x_i^{(k)}-x_i^{(k-1)}|<L\,A^{k-1}\,n^{k-1}\,\frac{\bar{x}^k}{k!}$$

come si dimostra subito coll'induzione completa.

« Ne segue che le serie (3) sono confrontabili coll'altra

$$(5)\qquad L\left\{\bar{x}+An\frac{\bar{x}^2}{1.2}+A^2n^2\frac{\bar{x}^3}{1.2.3}+\dots+A^{k-1}n^{k-1}\frac{\bar{x}^k}{k!}+\dots\right\}$$

e quindi convergono in ugual grado nel campo considerato, donde segue poi che le loro somme sono gli integrali cercati.

« Si osservi ora che in questa dimostrazione non è entrata affatto l'ipotesi che le $x_1^0 \dots x_n^0$ siano delle costanti: qualunque siano questi valori iniziali e comunque variino nel campo dato, le serie (3) sono sempre confrontabili colla (5): *esse quindi convergono in ugual grado anche quando in esse si considerino come variabili, oltre la x, i valori iniziali $x_1^0 \dots x_n^0$.* Ne segue che le loro somme, cioè gli integrali cercati, sono funzioni finite e continue delle $n+1$ variabili $x, x_1^0 \dots x_n^0$ e ciò dimostra il teorema enunciato.

« 2. Si supponga ora che le X_i abbiano anche le derivate parziali $\frac{\partial X_i}{\partial x_r}$ $(i, r=1, \dots n)$ finite e continue nel campo considerato, le quali in questo campo soddisfino a disuguaglianze analoghe alle (2): supponiamo cioè che si abbia

$$(6)\qquad \left|\frac{\partial X_i}{\partial x_r}(x, x'_1 \dots x'_n)-\frac{\partial X_i}{\partial x_r}(x, x_1 \dots x_n)\right|<A_1\sum_1^n{}_s\,|x'_s-x_s|$$

dove A_1 è una costante positiva. È allora facile dimostrare che:

Gli integrali $x_1, \dots, x_n$ ammetteranno le derivate prime rispetto ai valori iniziali, finite e continue.

« Si osservi infatti che a causa delle (2) si ha sempre $\left|\frac{\partial X_i}{\partial x_r}\right|<A$ e quindi per le (α) sarà:

$$\left|\frac{\partial x_i^{(1)}}{\partial x_r^0}\right|<A\bar{x}\qquad \text{per } i \gtrless r\,;\qquad \left|\frac{\partial x_i^{(1)}}{\partial x_i^0}\right|<1+A\bar{x}$$

$$\left|\frac{\partial x_i^{(2)}}{\partial x_r^0}\right|<A\bar{x}+nA^2\frac{\bar{x}^2}{1.2}\qquad \text{»}\quad ;\qquad \left|\frac{\partial x_i^{(2)}}{\partial x_i^0}\right|<1+A\bar{x}+nA^2\frac{\bar{x}^2}{1.2}$$

e in generale

$$(7)\qquad \begin{cases} \left|\dfrac{\partial x_i^{(k)}}{\partial x_r^0}\right| < \qquad A\overline{x} + nA^2\dfrac{\overline{x}^2}{1.2} + \cdots + n^{k-1}A^k\dfrac{\overline{x}^k}{k!} \quad \text{per } i \gtrless r \\ \left|\dfrac{\partial x_i^{(k)}}{\partial x_i^0}\right| < 1 + A\overline{x} + nA^2\dfrac{\overline{x}^2}{1.2} + \cdots + n^{k-1}A^k\dfrac{\overline{x}^k}{k!} \end{cases}$$

come si dimostra subito coll'induzione completa.

« Segue intanto di qui che esiste un numero finito M, tale che per tutti i valori dell'indice k e per i valori di i e di r da 1 fino ad n, si ha

$$(8)\qquad \left|\frac{\partial x_i^{(k)}}{\partial x_r^0}\right| < M.$$

Questa disuguaglianza ci sarà utile in seguito.

« Osserviamo ora che in generale si ha:

$$\frac{\partial x_i^{(k+1)}}{\partial x_r^0} - \frac{\partial x_i^{(k)}}{\partial x_r^0} = \int_0^x \sum_1^n{}_t \left\{ \frac{\partial X_i^{(k)}}{\partial x_t^{(k)}} \frac{\partial x_t^{(k)}}{\partial x_r^0} - \frac{\partial X_i^{(k-1)}}{\partial x_t^{(k-1)}} \frac{\partial x_t^{(k-1)}}{\partial x_r^0} \right\} dx =$$

$$= \int_0^x \sum_1^n{}_t \left\{ \frac{\partial X_i^{(k)}}{\partial x_t^{(k)}} - \frac{\partial X_i^{(k-1)}}{\partial x_t^{(k-1)}} \right\} \frac{\partial x_t^{(k)}}{\partial x_r^0}\, dx +$$

$$+ \int_0^x \sum_1^n{}_t \frac{\partial X_i^{(k-1)}}{\partial x_t^{(k-1)}} \left\{ \frac{\partial x_t^{(k)}}{\partial x_r^0} - \frac{\partial x_t^{(k-1)}}{\partial x_r^0} \right\} dx$$

e quindi, tenendo conto delle (4), (6), (8), in valore assoluto si avrà:

$$(9)\qquad \left|\frac{\partial x_i^{(k+1)}}{\partial x_r^0} - \frac{\partial x_i^{(k)}}{\partial x_r^0}\right| < M L A_1 A^{k-1} n^{k+1} \frac{\overline{x}^{k+1}}{(k+1)!} +$$

$$+ A \int_0^{\overline{x}} \sum_1^n{}_t \left| \frac{\partial x_t^{(k)}}{\partial x_r^0} - \frac{\partial x_t^{(k-1)}}{\partial x_r^0} \right| d\overline{x}$$

« Da questa formula, osservando che si ha:

$$\left|\frac{\partial x_t^{(1)}}{\partial x_r^0} - \frac{\partial x_t^0}{\partial x_r^0}\right| < A\overline{x}$$

facendo successivamente $k = 1, 2 \ldots k$ si ha:

$$\left|\frac{\partial x_i^{(2)}}{\partial x_r^0} - \frac{\partial x_i^{(1)}}{\partial x_r^0}\right| < n\frac{\overline{x}^2}{1.2} \{ M L A_1 n + A^2 \}$$

$$\left|\frac{\partial x_i^{(3)}}{\partial x_r^0} - \frac{\partial x_i^{(2)}}{\partial x_r^0}\right| < A n^2 \frac{\overline{x}^3}{3!} \{ 2 M L A_1 n + A^2 \}$$

. . . .

$$(10)\qquad \left|\frac{\partial x_i^{(k)}}{\partial x_r^0}-\frac{\partial x_i^{(k-1)}}{\partial x_r^0}\right|<\mathrm{A}^{k-1}\,n^k\,\frac{\overline{x}^{k+1}}{(k+1)!}\,\{k\,\mathrm{M\,L\,A_1}\,n+\mathrm{A}^2\}$$

Ne segue che le serie derivate delle (3):

$$(11)\qquad \frac{\partial x_i^{(1)}}{\partial x_r^0}+\left(\frac{\partial x_i^{(2)}}{\partial x_r^0}-\frac{\partial x_i^{(1)}}{\partial x_r^0}\right)+\cdots+\left(\frac{\partial x_i^{(k+1)}}{\partial x_r^0}-\frac{\partial x_i^{(k)}}{\partial x_r^0}\right)+\cdots$$

o meglio, le serie dei loro massimi valori assoluti sono confrontabili colla serie:

$$\mathrm{S}=\sum_{0}^{\infty}{}_{k}\,\mathrm{A}^{k-1}\,n^k\,\frac{\overline{x}^{k+1}}{(k+1)!}\,\{k\,n\,\mathrm{M\,L\,A_1}+\mathrm{A}^2\}$$

la quale, come immediatamente si verifica, converge in tutto il piano x. Le serie (11) convergono dunque uniformemente nel campo considerato e le loro somme sono funzioni finite e continue delle $x, x_1^0 \dots x_n^0$, e rappresentano le derivate $\frac{\partial x_i}{\partial x_r^0}$.

« Abbiamo dunque il teorema:

Se le funzioni X_i hanno nel campo considerato le derivate parziali $\frac{\partial \mathrm{X}_i}{\partial x_r}$ finite e continue e che soddisfino alle disuguaglianze fondamentali di Lipschitz, gli integrali delle (1), dati dal metodo delle approssimazioni successive, sono funzioni finite e continue della x e dei valori iniziali $x_1^0 \dots x_n^0$ ed ammettono rispetto a questi valori iniziali le derivate prime, anche esse finite e continue. Queste derivate si ottengono derivando termine a termine le serie (3) rispetto ai valori iniziali.

« 3. Si ammetta ora che le X_i abbiano le derivate parziali seconde $\frac{\partial^2 \mathrm{X}_i}{\partial x_r\,\partial x_s}$ finite e continue e che soddisfino alle disuguaglianze:

$$(12)\qquad \left|\frac{\partial^2 \mathrm{X}_i}{\partial x_r\,\partial x_s}(x\,,x'_1\dots x'_n)-\frac{\partial^2 \mathrm{X}_i}{\partial x_r\,\partial x_s}(x\,,x_1\,,\dots x_n)\right|<\mathrm{A}_2\sum_{1}^{n}{}_{t}\,|x'_t-x_t|$$

in tal caso gli integrali avranno le derivate seconde rispetto ai valori iniziali, finite e continue.

« Indicando infatti con P la maggiore delle quantità L, M, A, A_1 si dimostra facilmente la disuguaglianza

$$(13)\left|\frac{\partial^2 x_i^{(k)}}{\partial x_r^0\,\partial x_s^0}\right|<\mathrm{P}^2\left\{n\,\overline{x}+2n^2\,\mathrm{P}\,\frac{\overline{x}^2}{1\,.\,2}+\cdots+(k-1)\,\mathrm{P}^{k-2}\,n^{k-1}\,\frac{\overline{x}^{k-1}}{(k-1)!}\right\}+$$
$$+\frac{n^{k-1}\,\mathrm{P}^k\,\overline{x}^k}{k!}\,\{1+(k-1)\,n\mathrm{P}\,\}$$

e quindi anche, indicando con Q una quantità finita

$$(14) \qquad \left| \frac{\partial^2 x_i^{(k)}}{\partial x_r^0 \, \partial x_s^0} \right| < Q$$

donde, tenendo conto delle (12) e tornando a chiamare P la maggiore delle quantità P , A_2 , Q si perviene facilmente all'altra disuguaglianza

$$(15) \left| \frac{\partial^2 x_i^{(k)}}{\partial x_r^0 \, \partial x_s^0} - \frac{\partial^2 x_i^{(k-1)}}{\partial x_r^0 \, \partial x_s^0} \right| < n^k P^k \frac{\overline{x}^k}{k!} \left\{ 1 + 3P(k-1) + nP^2(k-1)^2 \right\}$$

donde segue che le serie, che si ottengono dalle (3) derivandole due volte termine a termine convergono in ugual grado nel campo dato, e ciò dimostra quello che si era affermato.

« Il medesimo processo dimostra più in generale il teorema:

Se le funzioni X_i hanno nel campo considerato le derivate parziali di ordine p rispetto alle $x_1 \dots x_n$, finite e continue, e tali che i loro rapporti incrementali siano finiti, gli integrali delle (1) dati dalle (3) avranno le derivate p^{me} rispetto ai valori iniziali finite e continue, e queste derivate p^{me} si otterranno derivando p volte termine a termine le serie (3).

« Da questo teorema generale come caso particolare, si ottiene l'altro:

Se le funzioni X_i sono funzioni analitiche degli argomenti $x_1 \dots x_n$, gli integrali saranno funzioni analitiche dei loro valori iniziali.

« 4. Il teorema dimostrato al n. 2 ha un'applicazione importante alla teoria delle equazioni lineari omogenee a derivate parziali del 1° ordine.

« È noto infatti che l'integrazione delle (1) è equivalente all'integrazione dell'equazione

$$(16) \qquad \frac{\partial f}{\partial x} + \sum_1^n {}_i X_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$$

poichè, presi gli n integrali $x_1 \dots x_n$ delle (1), e risolutili rispetto ai valori iniziali (il che è possibile, poichè le derivate $\frac{\partial x_i}{\partial x_r^0}$ *esistono* ed il loro determinante è diverso da zero), le relazioni che così si ottengono

$$(17) \qquad f_i(x, x, \dots x_n) = x_i^0 \qquad (i = 1 \dots n)$$

danno nei loro primi membri gli integrali indipendenti della equazione (16), che così è integrata completamente. Ne risulta una dimostrazione dell'esistenza dell'integrale generale delle (16), ottenuta mediante approssimazioni successive, sotto ipotesi molto più generali che non quelle che si richiedono nella dimostrazione ordinaria, dove è necessario supporre che le funzioni x_i

siano funzioni analitiche dei loro argomenti e che tale sia ancora la funzione iniziale arbitraria. Il teorema di esistenza dell' integrale generale della (16) può dunque enunciarsi:

L'equazione lineare omogenea del 1° ordine

$$\mathrm{X}\frac{\partial f}{\partial x}+\mathrm{X}_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+\cdots+\mathrm{X}_n\frac{\partial f}{\partial x_n}=0 \tag{16*}$$

nella quale le funzioni X_i sono finite e continue in tutti i loro argomenti e ammettono rispetto ad $n-1$ di essi $x_1 \dots x_n$ le derivate parziali prime finite e continue e che soddisfino inoltre alle disuguaglianze fondamentali

$$\left|\frac{\partial \mathrm{X}_i}{\partial x_r}(x\,,x'_1 \dots x'_n)-\frac{\partial \mathrm{X}_i}{\partial x_r}(x\,,x_1 \dots x_n)\right|<\mathrm{A}\sum_1^n{}_t\,|x'_t-x_t|$$

ammette un integrale $f(x\,,x_1 \dots x_n)$ che per $x=x_0$ si riduce ad una funzione arbitraria $\varphi\,(x_1 \dots x_n)$ delle n variabili $x_1 \dots x_n$, finita e continua in queste variabili [1].

« Si osservi ancora che ogni sistema delle funzioni $x_i^{(k)}$ che successivamente si ottengono nell'integrazione delle (1), è risolubile rispetto ai valori iniziali e le relazioni che così si ottengono

$$f_1^{(k)}=x_1^0\,,\quad f_2^{(k)}=x_2^0 \dots f_n^{(k)}=x_n^0 \tag{18}$$

danno nei loro primi membri n integrali indipendenti di un'equazione lineare omogenea del primo ordine. Si osservi infatti che le $\mathrm{X}_i^{(k-1)}$ sono funzioni note della x e dei valori iniziali $x_1^0 \dots x_n^0$ e quindi per le (18) anche funzioni note delle $x\,,x_1^{(k)} \dots x_n^{(k)}$: avendosi inoltre

$$dx_i^{(k)}=\mathrm{X}_i^{(k-1)}\,dx$$

si avrà che ognuna delle $f_i^{(k)}$ è un integrale dell'equazione lineare

$$\frac{\partial f^{(k)}}{\partial x}+\sum_1^n{}_t\,\mathrm{X}_t^{(k-1)}\frac{\partial f^{(k)}}{\partial x_t}=0 \tag{19}$$

dove le $\mathrm{X}_i^{(k-1)}$ si intendano espresse per le $x\,,x_1^{(k)} \dots x_n^{(k)}$. In tal modo il metodo delle approssimazioni successive riattacca ad ogni equazione lineare omogenea del 1° ordine una serie infinita di equazioni analoghe, il cui integral generale è noto insieme con quello dell'equazione data.

[1] Cf. Goursat, *Leçons sur les équations aux dérivées partielles du premier ordre*, pag. 37.

« Si osservi finalmente che le funzioni $f_i^{(k)}$ che successivamente si ottengono, considerate come funzioni delle $n+1$ variabili indipendenti $x, x_1 \dots x_n$, tendono *uniformemente* ai loro limiti $f_1, f_2 \dots f_n$ integrali della (16) e di qui si deduce un metodo diretto d'integrazione della (16) per approssimazioni successive [1].

« 5. Il teorema del numero antecedente dimostra anche, come mi ha fatto osservare il prof. Bianchi, l'unicità degli integrali delle (1), quando ne siano assegnati i valori iniziali. Poichè infatti un integrale della (16) si riduce identicamente uguale ad una costante, quando in esso si pongano per $x_1 \dots x_n$ gli integrali delle (1); indicando con $f_1, f_2 \dots f_n$ n integrali indipendenti della (16), tali cioè che il determinante funzionale $\dfrac{d(f_1 f_2 \dots f_n)}{d(x_1 x_2 \dots x_n)}$ sia diverso da zero, gli integrali delle (1) che per $x = x_0$ prendono i valori iniziali $x_1^0 \dots x_n^0$, dovranno soddisfare alle relazioni

$$f_i(x, x_1 \dots x_n) = f_i(x_0, x_1^0 \dots x_n^0) \qquad (i = 1, 2 \dots n) \tag{20}$$

dalle quali le $x_1, x_2 \dots x_n$ sono definite in modo unico in funzione di x e dei loro valori iniziali.

[1] Si osservi infatti il teorema generale, di cui ometto per brevità la dimostrazione: Siano n funzioni indipendenti

$$y_r^{(i)} = f_r(x_1, x_2, \dots x_n, a_i) \quad (r = 1 \dots n) \tag{a}$$

di n variabili indipendenti $x_1 \dots x_n$ e che dipendono anche da un parametro a, il quale percorra tutti i punti di un gruppo di prima specie

$$a_1, a_2 \dots a_n \dots \tag{b}$$

avente un unico punto limite a_∞: e per ogni valore del parametro a che si considera le funzioni $y^{(i)}$ corrispondenti siano finite e continue nelle x insieme colle loro derivate prime ed avvicinandosi il punto a al punto limite a_∞, tendano *uniformemente*, esse e le loro derivate prime, ad n funzioni indipendenti delle x, $Y_1 Y_2 \dots Y_n$ ed alle loro derivate prime; siano tali cioè che le serie:

$$y_r^{(1)} + (y_r^{(2)} - y_r^{(1)}) + \cdots + (y_r^{(k)} - y_r^{(k-1)}) + \cdots \tag{c}$$

$$\frac{\partial y_r^{(1)}}{\partial x_t} + \left(\frac{\partial y_r^{(2)}}{\partial x_t} - \frac{\partial y_r^{(1)}}{\partial x_t}\right) + \cdots + \left(\frac{\partial y_r^{(k)}}{\partial x_t} - \frac{\partial y_r^{(k-1)}}{\partial x_t}\right) + \cdots \tag{d}$$

convergano uniformemente nel campo considerato. Allora, se da ogni gruppo di funzioni $y^{(i)}$ corrispondenti al valore a_i del parametro a si traggono le x in funzione delle n variabili y, le funzioni $x^{(i)}$ così definite, godono delle medesime proprietà delle funzioni $y^{(i)}$ delle x, cioè le serie

$$x_i^{(1)} + (x_i^{(2)} - x_i^{(1)}) + \cdots + (x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}) + \cdots \tag{e}$$

$$\frac{\partial x_i^{(1)}}{\partial y_r} + \left(\frac{\partial x_i^{(2)}}{\partial y_r} - \frac{\partial x_i^{(1)}}{\partial y_r}\right) + \cdots + \left(\frac{\partial x_i^{(k)}}{\partial y_r} - \frac{\partial x_i^{(k-1)}}{\partial y_r}\right) + \cdots \tag{f}$$

convergono anche esse in ugual grado e le loro somme sono le funzioni x_i tratte dalle Y_r e le loro derivate.

« Il teorema dell'unicità è così dimostrato.

« 6. Dal teorema del n. 3, col medesimo ragionamento che ha servito nel caso di una equazione lineare omogenea del 1° ordine, deduciamo il teorema generale, importante per le applicazioni:

Quando l'integrazione, sotto date condizioni iniziali, di un'equazione o di un sistema di più equazioni alle derivate parziali (ed anche ai differenziali totali) in una o più funzioni incognite, si possa ridurre all'integrazione di un sistema di equazioni differenziali ordinarie, il metodo delle approssimazioni successive, quando siano soddisfatte le condizioni corrispondenti a quelle del teorema del n. 3, dimostra l'esistenza degli integrali delle equazioni date che soddisfanno alle condizioni iniziali assegnate ».

Geodesia. — *Intorno alla effettiva determinazione della superficie di livello terrestre, entro regioni limitate.* Nota di P. Pizzetti, presentata dal Socio Cremona.

« 1. Il metodo seguìto fin qui dai Geodeti per determinare la figura del Geoide, sopra una limitata regione della Terra, può, in una forma teorica e schematica, essere presentato così: le operazioni geodetiche propriamente dette forniscono le posizioni relative di un certo numero di punti fissi (vertici geodetici), o, per dir più esattamente, esse servono a determinare una figura poliedrica a facce triangolari aventi per vertici tali punti. Le operazioni astronomiche poi individuano le direzioni delle verticali pei punti stessi, nonchè l'orientamento di taluni lati del poliedro.

« Si ha quindi, in ultima analisi, assegnato, per le posizioni relative e le direzioni, un sistema di rette (*verticali*); e la superficie del Geoide, nella regione che si considera, resta determinata, entro una certa approssimazione, dalla condizione di passare per un punto determinato (livello medio del mare in un punto della costa marittima) e di intersecare ortogonalmente quelle rette.

« Praticamente, come ognun sa, il procedimento è meno diretto. Si assume a base di riferimento dei calcoli geodetici una superficie nota ausiliaria (ellissoide di Bessel, ovvero quello di Clarke) e si immagina questa superficie collocata in guisa che un suo punto, la sua normale e il suo piano meridiano coincidano ordinatamente con un vertice della rete, colla verticale e col meridiano astronomico di tal vertice. Le operazioni ed i calcoli geodetici assegnano, con una certa approssimazione, le posizioni, su questa superficie, dei punti *projezione* dei vertici geodetici, nonchè le direzioni delle normali in questi punti (*latitudini e longitudini ellissoidiche*), e dal con-

fronto di queste direzioni con quelle fornite dalle osservazioni astronomiche, risultano poste in evidenza e misurate le così dette *attrazioni locali*, ossiano le deviazioni angolari fra le dette normali e le verticali. Da tali deviazioni si può facilmente, in causa della piccolezza loro, dedurre gli scostamenti lineari fra la superficie di riferimento e il Geoide, il quale resta così, anche qui, in ultima analisi, determinato per mezzo di un sistema di verticali.

« Ma tutto ciò suppone tacitamente una cosa: ed è che la *verticale osservata* in un punto terrestre (più o meno elevato sul mare) coincida colla *normale* al Geoide in quel punto nel quale la verticale stessa incontra questa superficie. Ciò non è esattamente vero, in causa del non parallelismo delle varie superficie di livello. Veramente un tale difetto di parallelismo è assai piccolo e le correzioni (*riduzioni al livello del mare*) che si dovrebbero fare alle latitudini, alle longitudini astronomiche e agli azimut, per passare dalla verticale osservata alla normale del Geoide, sono, presumibilmente, trascurabili di fronte agli errori di varia specie che affettano quelle determinazioni astronomiche. Ma non è men vero che, quando si vuol stabilire, indipendentemente da qualsiasi ipotesi arbitraria, un metodo adatto allo studio del Geoide, la necessità di tali correzioni non può essere dimenticata. Nè, a liberarsi da tale difficoltà, giova il dedurre i valori delle correzioni stesse da calcoli fondati sopra un'espressione matematica più o meno arbitraria della *funzione potenziale* terrestre; poichè si introduce in tal modo una di quelle ipotesi arbitrarie, che si vogliono appunto evitare.

« In una Nota inserita pochi mesi sono nelle « Astronomische Nachrichten » [1] è indicato come la riduzione delle latitudini e longitudini da una superficie di livello ad un'altra si possa eseguire, indipendentemente da qualsiasi ipotesi arbitraria, basandosi sulle *misure di gravità relativa*, quando la porzione di verticale, lungo la quale si deve eseguire il trasporto, attraversi uno spazio di densità nota. Se questa densità è uguale a quella dell'ambiente nel quale le misure di gravità sono eseguite, le formole per il trasporto della latitudine φ e della longitudine ω lungo una porzione δn di verticale sono

$$(1) \qquad \delta\varphi = -\frac{1}{ag}\frac{\partial g}{\partial \varphi}\cdot\delta n, \qquad \delta\omega\,.\cos^2\varphi = -\frac{1}{ag}\frac{\partial g}{\partial \omega}\cdot\delta n\ ,$$

dove $\frac{\partial g}{\partial \varphi}$ e $\frac{\partial g}{\partial \omega}$ esprimono i rapporti di accrescimento della gravità g al variare della latitudine e della longitudine (Est) rispettivamente.

« È pure dimostrato, nella detta Nota, come la riduzione delle latitudini e longitudini dalla superficie del suolo al livello del mare, nello stato attuale delle nostre cognizioni sulla densità degli strati geologici che costi-

(1) *Sur la réduction des latitudes et des longitudes astronomiques au niveau de la mer*, par P. Pizzetti (Astr. Nachr., Bd. 138).

tuiscono le sopraelevazioni continentali, non possa direttamente calcolarsi con sufficiente precisione. Ma a questa difficoltà è facile rimediare.

« Invece di ridurre le osservazioni astronomiche al livello del mare, possiamo ridurle per mezzo delle formole (1) ad una superficie di livello la quale passi pel punto più alto P_0 del terreno nella regione che si studia. Siamo così ridotti a determinare questa *superficie di livello sopraelevata*, anzichè il cosidetto Geoide. Determinata questa superficie, le misure di gravità relativa ci dànno poi il modo di dedurne il Geoide. Sia infatti H l'altezza (fornita da una livellazione geometrica) del punto P_0 sul livello del mare e G la gravità in esso punto. Sia poi h la distanza fra la superficie sopraelevata e il Geoide, in un punto nel quale la gravità sia g [1]. Si avrà, prossimamente:

$$\frac{h}{H} = \frac{G}{g} .$$

Questa formola vale, in verità, soltanto per valori infinitesimi di h, H, ma può adoperarsi anche per valori finiti, in quell'ordine di approssimazione, secondo il quale i calcoli geoidici sono costantemente condotti; vogliamo dire, quando si trascurino le seconde potenze dei rapporti fra le elevazioni continentali e il raggio medio della Terra. (A questo stesso ordine d'approssimazione p. es. bisogna necessariamente tenersi quando si fanno i calcoli relativi alle livellazioni geometriche tenendo conto del difetto di parallelismo della superficie di livello).

« 2. Il sig. Y. Villarceau in una Nota pubblicata nel 1873 [2] indicò un suo metodo destinato a determinare *per punti* la superficie del Geoide. La livellazione trigonometrica, egli osserva, ci dà le altezze dei punti terrestri sopra l'Ellissoide di riferimento; la livellazione geometrica di precisione fornisce d'altra parte le altezze dei punti medesimi al disopra del Geoide. Il paragone dei risultati di tali due operazioni dà quindi direttamente gli scostamenti lineari fra il Geoide e l'Ellissoide di riferimento.

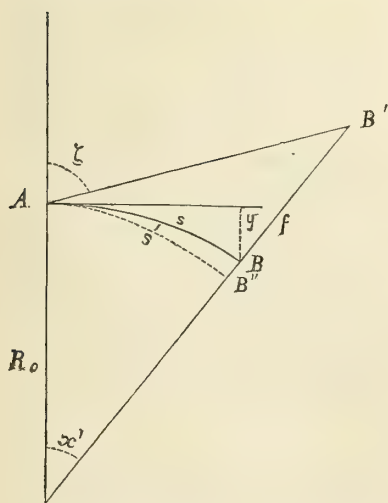
« La incertezza che è propria della livellazione trigonometrica (specialmente per effetto della irregolarità della refrazione atmosferica in prossimità dell'orizzonte) toglie, per ora, qualsiasi valore pratico a questo metodo ingegnoso; nè varrebbe forse la pena di richiamarne la memoria, se l'idea di Villarceau non fosse stata riprodotta in qualche magistrale Memoria di geodesia ed anche in qualche pubblicazione didattica, e presentata agli stu-

(1) S'intende tanto qui, come in quanto precede, che le misure di gravità debbono tutte essere previamente ridotte ad una unica superficie di livello il che si può fare, con precisione sufficiente, colla nota correzione $\delta g = \mp \frac{2g}{a} \delta n$.

(2) *Nouveau théorème sur les attractions locales, et application à la détermination de la vraie figure de la Terre*, par Y. Villarceau (Journal de Liouville, t. 18, 2e série).

diosi come l'*unica* adatta a risolvere completamente (ossia senza bisogno di ipotesi arbitrarie) il problema della determinazione dcl Geoide.

« Quanto abbiamo detto più sopra, come corollario della citata Nota delle Astr. Nachr., ci sembra sufficiente a provare che, in realtà, anche il metodo comunemente seguìto dai geodeti, quello cioè di determinare il Geoide per mezzo delle sue normali, può venire praticato in guisa da far senza di ipotesi arbitrarie. Ed era quello che ci interessava di stabilire in questa Nota. Siccome tuttavia il metodo di Villarceau (astrazion fatta dalla difficoltà pratica, alla quale si è accennato) si presenta, a prima vista, come assai semplice, e siccome può sembrare che la determinazione approssimata di una superficie *per punti* sia, dal lato teorico, preferibile a quella che si può avere per mezzo delle *normali*, così ci sembra non privo di interesse l'instituire un paragone, almeno schematico ed elementare, fra i risultati dei due metodi.

« 3. Qualunque sia la distribuzione della massa nell'interno della Terra, noi sappiamo tuttavia, per le proprietà elementari della funzione potenziale, che le superficie di livello terrestre sono superficie continue, aventi ovunque un piano tangente e che la direzione di questo piano tangente varia con continuità da un punto all'altro. Queste sono, non ipotesi arbitrarie, ma conseguenze necessarie della legge di Newton. Se di più ci limitiamo a considerare porzioni di superficie di livello *sopraelevate* (il che è lecito in base a ciò che si è detto al n. 1, anche i raggi di curvatura della superficie stessa dovranno considerarsi come variabili in modo continuo, giacchè le variazioni discontinue che tali curvature possono subire per effetto di variazioni discontinue della densità atmosferica, sono trascurabili ed in ogni modo sempre mutabili col tempo, e di esse non si può tener conto nel determinare la *forma media* del Geoide.

« Premesso ciò, è geometricamente giustificato il procedimento approssimativo che consiste nel ritenere confuso un breve arco AB di geodetica del Geoide coll'arco di cerchio osculatore in uno degli estremi A. Chiamando s la lunghezza dell'arco, x l'angolo fra le due verticali negli estremi, la distanza y del punto B dal piano tangente in A è data prossimamente da

$$y = \frac{1}{2} s x ,$$

trascurando le quantità piccole del 3° ordine rispetto ad x.

« Se s ed x sono affette da piccoli errori δs, δx, il corrispondente errore δy è prossimamente dato da

$$(2) \qquad \delta y = \frac{1}{2} s \, . \, \delta x + \frac{1}{2} x \, . \, \delta s$$

« Supponiamo invece misurata in A la distanza zenitale ζ di un punto B' situato sulla verticale di B, e sia pure nota la elevazione f del punto B' sopra B. Sia B'' la projezione del punto B sopra una superficie ausiliaria di riferimento (ellissoide) tangente al Geoide in A, e diciamo s' la lunghezza dell'arco geodetico AB'' che consideriamo come confuso coll'arco di cerchio, di raggio R_0, osculatore in A. Considerando la verticale in B come confusa colla normale all'arco AB'' (il che può farsi con più che sufficiente approssimazione in questa specie di calcolo) la y potrà essere dedotta dalle due formole:

$$x' = \frac{s'}{R_0},$$

$$y = R_0 \cos \zeta \, . \operatorname{sen} x' . \operatorname{cosec} (x' - \zeta) + f . \cos x',$$

donde, eliminando x' e calcolando l' incremento δy che y subisce quando a ζ, f, s' si dànno gli incrementi $\delta \zeta$, δf, $\delta s'$ si ha (a meno di quantità del 3° ordine rispetto ad x' e $\frac{\pi}{2} - \zeta$)

$$(2') \qquad \delta y = \cos . x' . \delta f - \cos \zeta . \delta s' + s' . \delta \zeta$$

« Le formole (2) (2') ci esprimono, in modo schematico, quale sia l'influenza degli errori, dai quali sono affetti i dati di osservazione, sui risultati dei due metodi che vogliamo paragonare. La (2) si riferisce al metodo comune che determina il Geoide per mezzo delle sue normali; l'arco s è dato dalle operazioni geodetiche, l'angolo x dalle astronomiche. La (2') è relativa al metodo di Villarceau: la f è fornita dalla livellazione geometrica; la ζ è o direttamente misurata, oppure mediatamente dedotta dalla livellazione trigonometrica; la s' è data dalle operazioni geodetiche.

« 5. Analizziamo gli elementi dei quali si compongono gli errori δx, δs, $\delta s'$, δf, $\delta \zeta$.

« L'errore δx dipende: 1° dalla imperfezione delle misure astronomiche di latitudine e di longitudine; 2° dagli errori di riduzione di questi dati astronomici ad un' unica superficie di livello. Di questa riduzione ci siamo occupati nel n. 1, ed abbiamo ricordato come sia teoricamente possibile di valutarla. I termini di correzione che essa esige sono tuttavia, secondo ogni probabilità, estremamente piccoli e dello stesso ordine di grandezza degli errori medî dei dati astronomici.

« Riguardo all'errore δs, dobbiamo riflettere che l'arco s è generalmente dedotto da una triangolazione e che i calcoli, che forniscono questo arco, hanno per oggetto: 1° la riduzione delle basi e degli angoli orizzontali osservati all'ellissoide di riferimento; 2° la risoluzione della rete di triangoli su questo ellissoide ed il conseguente calcolo dell'arco di geodetica ellissoidica AB″; 3° il passaggio da questo arco ellissoidico a quello corrispondente di geodetica geoidica. L'errore δs deriva quindi:

A) dagli errori commessi nella misura degli angoli e delle basi;

B) dagli errori di riduzione delle basi dalla superficie del suolo alla superficie di livello passante per A e da questa allo ellissoide. Per poter eseguire questa riduzione, bisogna conoscere: *a*) l'altezza media di ogni base sul livello del punto A; e questa altezza può sempre considerarsi come nota con sufficiente approssimazione [1]; *b*) lo scostamento verticale medio fra la superficie di livello e l'ellissoide, al di sotto della base. Di questo scostamento non si può, naturalmente, tener conto, in un calcolo di 1ª approssimazione;

C) dagli errori di riduzione degli angoli orizzontali all'ellissoide. Tali errori debbono tuttavia considerarsi come in massima parte eliminati, per la *condizione di chiusura*, che, nella compensazione della rete, si impone ai triangoli geodetici. In virtù di questa condizione, gli angoli *compensati* debbono dare, per ogni triangolo, quella somma che compete al triangolo geodetico ellissoidico;

D) dagli errori che, nel calcolo della rete ellissoidica, si commettono, in causa di non esatto orientamento della rete stessa. Per reti non molto estese, l'influenza di tali errori può considerarsi come trascurabile;

E) dalla differenza fra l'arco di geodetica s' calcolato sull'ellissoide e l'arco corrispondente s sul Geoide. Anche di questa differenza non si può tener conto in un calcolo di prima approssimazione. Essa è d'ordinario oltremodo piccola e l'errore derivante dal trascurarla è generalmente di senso opposto [2] a quello dovuto al trascurare l'elemento considerato sotto la sezione *b*) del comma *B)*.

« In ultima analisi dunque, l'errore δs può, nella sua parte più importante, considerarsi come dovuto alle imperfezioni proprie della misura delle basi e degli angoli.

(1) Un errore di 3^m nell'altezza media di una base, porta appena un errore di $\frac{1}{2\,100\,000}$ circa nella lunghezza dei lati della rete.

(2) Se nella triangolazione sono state misurate parecchie basi ben distribuite, si può asserire che i due errori provenienti dal trascurare l'elemento *E*) da una parte e l'elemento *B*) *b*) dall'altra, si distruggono mutuamente. Giacchè l'arco ellissoidico s' si può allora considerare come calcolato sopra un ellissoide, il cui scostamento medio, rispetto alla superficie di livello che si studia, è nullo nella regione che si considera.

« 6. L'errore $\delta s'$ viene costituito da tutti quegli elementi che ora abbiamo enumerati a proposito del δs, salvo da quello considerato sotto il comma *E)*. Il δf è l'errore proprio della livellazione geometrica e deriva, oltrechè dagli errori d'osservazione, anche dall'incertezza delle così dette *correzioni dinamiche* delle quote. Si può ritenere, in ogni modo, che il termine in δf nella formola (2') sia estremamente piccolo di fronte agli altri due.

« Veniamo finalmente al $\delta\zeta$. Se il punto B' è stato direttamente osservato da A, il $\delta\zeta$ sarà dovuto a tutti quegli elementi che rendono incerta la determinazione di una *vera* distanza zenitale. Se poi B' non è stato direttamente collimato da A, si sarà fatta invece una livellazione trigonometrica da A in B', in guisa da calcolare la quota del punto B' rispetto all'ellissoide di riferimento, e da questa quota si potrà dedurre l'angolo ζ. Per la natura stessa del problema che ci occupa, la distanza AB' non sarà molto grande, e quindi neppur molto grande sarà il numero dei lati della poligonale. In tali circostanze è facile dimostrare che l'errore $\delta\zeta$ è della stessa natura (e ciò è cosa intuitiva) e dello stesso ordine di grandezza degli errori che affettano le distanze zenitali dei singoli lati della poligonale [1]. L'errore $\delta\zeta$ può quindi considerarsi come dovuto:

A) agli errori proprî delle distanze zenitali apparenti,

B) alla valutazione inesatta della rifrazione atmosferica,

C) all'incertezza delle attrazioni locali nei vertici della poligonale fra A e B'. Giacchè, per eseguire il calcolo della livellazione trigonometrica, oc-

[1] Se il punto B' è legato al punto A da una poligonale $AB_2B_3..B'$ di n lati di lunghezze rispettive $s_1, s_2 ... s_n$ e se $\zeta_1, \zeta_2 ... \zeta_n$ sono le distanze zenitali di questi lati nei punti $A, B_2, B_3 ...$ risp., la distanza zenitale ζ della AB' in A, può, trascurandosi, per semplicità, la curvatura dell'ellissoide, essere dedotta dalla formola

$$s \cot \zeta = \sum_1^n s_i \cot \zeta_r$$

Quindi la relazione fra $\delta\zeta$ e i $\delta\zeta_r$ è prossimamente, ponendo l'unità in luogo di $\operatorname{sen}\zeta$, $\operatorname{sen}\zeta_r$:

$$\delta\zeta = \frac{1}{s} \sum s_r \, . \, \delta\zeta_r \, . \tag{a}$$

Ammettendo che la lunghezza del lato di chiusura s della poligonale non sia inferiore alla *semisomma* dei lati, ed attribuendo ai lati stessi un valor medio comune, la (a) dimostra che il $\delta\zeta$ è compreso fra

$$\frac{2}{n} \sum \delta\zeta_r \quad \text{e} \quad \frac{1}{n} \sum \delta\zeta_r$$

ossia fra *una* e *due volte* la media aritmetica dei singoli $\delta\zeta_r$. È chiaro quindi che se il numero dei lati è piccolo l'errore $\delta\zeta$ sarà, in media, dello stesso ordine di grandezza degli errori $\delta\zeta_r$. Per grandi valori di n poi, la parte *accidentale* del $\delta\zeta$ tende ad essere molto piccola di fronte all'error medio accidentale delle ζ_r, mentre la parte *sistematica* del $\delta\zeta$ è dello stesso ordine di grandezza che in ciascuno dei $\delta\zeta_r$.

corre che le distanze zenitali vere, determinate in ciascun vertice, sieno *ridotte dallo zenit astronomico allo zenit ellissoidico*, mediante la correzione

$$\Delta\zeta = -\cos A \,.\, \Delta\varphi + \operatorname{sen} A \,.\, \cos\varphi \,.\, \Delta\omega \ ,$$

dove $\Delta\varphi$, $\Delta\omega$ sono le attrazioni locali in latitudine e in longitudine pel vertice che si considera, A è l'azimut della visuale. Una tale correzione è, generalmente, dello stesso ordine di grandezza di $\Delta\varphi$, $\Delta\omega$. Occorre quindi che nei vertici della poligonale siano fatte le determinazioni astronomiche, ed ogni errore in queste misure, si ripercuote, in media, con eguale intensità sulle distanze zenitali ellissoidiche.

« 7. Trascurando nella (2′) il termine δf, ponendovi δs in luogo di $\delta s'$, e osservando che, senza alterare l'ordine di approssimazione, si può scrivere $\frac{s}{R_0}$ al posto di x e sostituire la differenza $\frac{f}{s} - \frac{s}{2\,R_0}$ al posto di $\cos\zeta$, le (2) (2′) diverranno

$$(3) \qquad \delta y = \frac{1}{2}\, s \,.\, \delta x + \frac{s}{2\,R_0} \cdot \delta s$$

$$(3') \qquad \delta y = s \,.\, \delta\zeta + \left(\frac{s}{2\,R_0} - \frac{f}{s}\right) \delta s$$

« Il paragone di queste due formole dimostra che, quando pur si potesse ridurre l'errore medio della distanza zenitale vera ad essere uguale a quello dell'angolo x fra le verticali, l'influenza del primo di questi errori resterebbe tuttavia doppia di quella del secondo. Quanto al termine in δs, esso potrà, per distanze non molto grandi e per regioni molto accidentate, risultare, eventualmente, più piccolo nella (3′) che nella (3); ma quando la distanza cresce oltre un certo limite, il termine $\frac{f}{s}$ tenda a divenir trascurabile di fronte ad $\frac{s}{2\,R}$, e allora l'influenza del δs è la stessa nelle due formole.

« Il calcolo instituito in questo modo non dimostra dunque, in favore del metodo di Villarceau, alcun vantaggio di fronte a quello comunemente seguito nella determinazione del Geoide. Senza dubbio, la discussione così fatta non può considerarsi come esauriente, come del resto nessun'altra potrebbe esserlo in argomento così complesso. Senza dubbio, il paragone dei due metodi fatto in base alle formole (3) (3′) non vale che pel caso in cui si consideri, tutto intorno ad un centro, un'area limitata del Geoide (di poche centinaia di kilometri di raggio). Resta certamente il dubbio che quelle irregolarità *affatto locali e di piccolissima estensione*, che il Geoide presenta in causa di difetti o di eccessi locali di densità nella corteccia terrestre, vengano più facilmente determinate per *punti* che per mezzo delle *normali*. Ma, con tutto ciò, le considerazioni svolte in questa Nota ci sembrano sufficienti a dimostrare, come sia del tutto infondata quell'assoluta preferenza che taluni Geodeti hanno voluto dare, dal punto di vista teorico, al metodo di Villarceau ».

Fisica-matematica. — *Sulla distribuzione indotta in un cilindro indefinito da un sistema simmetrico di masse.* Nota di TULLIO LEVI-CIVITA, presentata dal Socio EUGENIO BELTRAMI.

I.

« Il problema dell'induzione elettrica presenta, come è noto, anche per conduttori di forma semplicissima, difficoltà analitiche rimaste fino ad ora quasi sempre insuperate. Per il caso particolare, in cui le masse inducenti e la superficie del conduttore posseggano uno stesso asse di simmetria, il prof. Beltrami immaginò alcuni procedimenti analitici [1], che, se permettono di risolvere con grande eleganza il problema da lui trattato dell'induzione sopra un disco circolare, non si possono poi utilizzare (almeno direttamente) per altre questioni, neppure ad esempio per il cilindro, che tuttavia ha, come il disco, rettilinee le sezioni meridiane.

« La presente Nota ha per iscopo di determinare la densità della distribuzione, indotta in un cilindro circolare indefinito, da un sistema simmetrico di masse: Il calcolo, che vi conduce (quantunque a bello studio non esiga alcun richiamo) è una applicazione immediata del metodo per l'inversione degli integrali definiti, che esposi in uno scritto recente [2]. Io dovrò quì limitarmi a far vedere come la equazione funzionale, da cui dipende il proposto problema, si possa ben facilmente ricondurre ad un tipo già noto. Ho poi trovato (e mi propongo di mostrarlo tra breve), assegnando in tal modo una espressione analitica della quantità incognita, e supponendo molto piccolo il raggio del cilindro, che la densità (lineare) della distribuzione indotta in un filo conduttore è proporzionale al potenziale delle masse inducenti e varia da filo a filo in ragione inversa del logaritmo del raggio della sezione.

« Questi risultati relativi ai fili presentano, a mio credere, particolare interesse, perchè valgono senz'altro anche per distribuzioni inducenti non simmetriche.

« È appena necessario aggiungere che la nostra ricerca dà mezzo di risolvere *approssimativamente* il problema dell'induzione elettrica, quando il cilindro od il filo, senz'essere indefiniti, sieno abbastanza lunghi, ma però in comunicazione col suolo.

(1) *Sulla teoria delle funzioni potenziali simmetriche.* Mem. dell'Acc. di Bologna, ser. IV, tom. II.

(2) *Sull'inversione degli integrali definiti nel campo reale.* Atti del'Acc. di Torino, vol. XXXI.

« Noto da ultimo che non si sarebbe potuto partire dai noti risultati di F. Neumann e di Lipschitz relativi all'ellissoide allungato, immaginando poi grandissimo l'asse di rotazione, poichè le formole di questi autori, anche prescindendo dalla loro estrema complicazione, presuppongono essenzialmente *finita* la lunghezza di detto asse e quindi non si prestano per un facile passaggio al limite; avrei potuto invece prender le mosse da alcune considerazioni di Kirchhoff [1] relative al potenziale di masse distribuite sulla superficie di un cilindro, ma il procedimento seguito sembrami assai più semplice e diretto.

« Dato un cilindro circolare γ di raggio a, si fissi un sistema cartesiano ortogonale, di cui l'asse delle z coincida con quello del cilindro, poi si ponga:

$x = r \cos \vartheta,\ y = r \operatorname{sen} \vartheta$ e si intendano adottate, come sistema di iferimento, le coordinate cilindiche z, r, ϑ.

« Il potenziale di un sistema simmetrico di masse dipenderà, come è manifesto, soltanto da z e da r, e sarà quindi una funzione $P(z, r)$, che, nei punti esterni alle masse potenzianti, soddisfa all'equazione di Laplace:

$$\Delta_2 P \equiv \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \left\{ r \frac{\partial P}{\partial r} \right\}}{\partial r} = 0 .$$

« Sulla superficie cilindrica γ, essendo $P(z, a)$ il valore di questo potenziale esterno, quello incognito V della distribuzione indotta dovrà essere $c - P(z, a)$, dove però la costante è da porsi addirittura eguale a zero, perchè il cilindro si estende indefinitamente.

« Nè la funzione V, nè, si intende, la corrispondente densità μ della distribuzione indotta dipendono da ϑ, perchè una rotazione arbitraria intorno all'asse delle z lascia inalterate le condizioni del fenomeno.

« Avremo poi, indicando con ζ, a, τ le coordinate di un punto generico di γ, con z, r, ϑ quelle del punto potenziato, con $d\sigma = a d\tau d\zeta$ un elemento superficiale:

$$V = \int_\gamma \mu(\zeta) \frac{d\sigma}{\sqrt{(z-\zeta)^2 + (a \cos \tau - r \cos \vartheta)^2 + (a \operatorname{sen} \tau - r \operatorname{sen} \vartheta)^2}} =$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \mu(\zeta)\, d\zeta \int_0^{2\pi} \frac{a d\tau}{\sqrt{(z-\zeta)^2 + a^2 + r^2 - 2ar \cos(\tau - \vartheta)}}$$

dove l'integrale interno rappresenta il potenziale di una circonferenza omo-

[1] *Ueber den inducirten Magnetismus eines unbegrenzten Cylinders von weichem Eisen.* Crelle's Journal, B. 48.

genea di altezza ζ, di raggio a e di densità 1, sul punto z, r, ϑ ed è quindi evidente ([1]) che si può addirittura farvi $\vartheta = 0$, dopo di che otterremo:

$$\mathrm{V}(z, r) = \int_{-\infty}^{\infty} \mu(\zeta)\, d\zeta \int_0^{2\pi} \frac{a d\tau}{\sqrt{(z-\zeta)^2 + a^2 + r^2 - 2ar\cos\tau}} =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mu(\zeta)\, d\zeta \int_0^{\pi} \frac{2 a d\tau}{\sqrt{(z-\zeta)^2 + a^2 + r^2 - 2ar\cos\tau}}$$ e, ponendo

$\tau = 2\varphi$, verrà come espressione definitiva:

$$\mathrm{V}(z, r) = \int_{-\infty}^{\infty} \mu(\zeta)\, d\zeta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4 a d\varphi}{\sqrt{(z-\zeta)^2 + (a+r)^2 - 4ar \operatorname{sen}^2\varphi}},$$ la

([1]) Se si volesse proprio la conferma analitica che un integrale del tipo

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\tau}{\sqrt{(z-\zeta)^2 + a^2 + r^2 - 2ar\cos(\tau - \vartheta)}}$$

non dipende da ϑ, si potrebbe procedere nel modo seguente:

Dall'identità:

$$(z-\zeta)^2 + a^2 + r^2 - 2ar\cos(\tau-\vartheta) = \left\{ \frac{\sqrt{(z-\zeta)^2 + (a+r)^2} + \sqrt{(z-\zeta)^2 + (a-r)^2}}{2} \right\}^2 +$$

$$\left\{ \frac{\sqrt{(z-\zeta)^2 + (a+r)^2} - \sqrt{(z-\zeta)^2 + (a-r)^2}}{2} \right\}^2 - 2 \left\{ \frac{\sqrt{(z-\zeta)^2 + (a+r)^2} + \sqrt{(z-\zeta)^2 + (a-r)^2}}{2} \right\}$$

$$\left\{ \frac{\sqrt{(z-\zeta)^2 + (a+r)^2} - \sqrt{(z-\zeta)^2 + (a-r)^2}}{2} \right\} \cos(\tau - \vartheta),$$

apparisce che ponendo:

$$\alpha = \frac{\sqrt{(z-\zeta)^2 + (a+r)^2} - \sqrt{(z-\zeta)^2 + (a-r)^2}}{\sqrt{(z-\zeta)^2 + (a+r)^2} + \sqrt{(z-\zeta)^2 + (a-r)^2}}$$ ($\alpha < 1$, per z, r non contemporaneamente eguali a ζ, a), il nostro integrale può essere scritto:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\tau}{\sqrt{(z-\zeta)^2 + a^2 + r^2 - 2ar\cos(\tau - \vartheta)}}$$

$$= \frac{4}{\left\{ \sqrt{(z-\zeta)^2 + (a+r)^2} + \sqrt{(z-\zeta)^2 + (a-r)^2} \right\}} \int_0^{2\pi} \frac{d\tau}{\sqrt{1 + \alpha^2 - 2\alpha\cos(\tau - \vartheta)}}.$$

Siccome si è notato che, nei punti esterni alla circonferenza potenziante, $\alpha < 1$, il radicale sotto il segno è sviluppabile in serie di potenze e precisamente si avrà, come è ben noto:

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2 - 2\alpha\cos(\tau - \vartheta)}} = \sum_{0\ n}^{\infty} \alpha^n P_n \{\cos(\tau - \vartheta)\},$$ P_n essendo simbolo della funzione sferica d'indice n. Ora si sa pure dalla teoria delle funzioni sferiche che: $P_n \{\cos(\tau - \vartheta)\} = \sum_{0\ \nu}^{n} a_{n,\nu} \cos\nu(\tau - \vartheta)$ colle a costanti; ne viene che, quando si eseguisce, rispetto a τ, l'integrazione di $\frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2 - 2\alpha\cos(\tau - \vartheta)}}$ fra 0 e 2π, i termini contenenti coseni ($\nu > 0$) dànno risultato nullo e il valore dell'integrale riesce, come si era asserito, indipendente da ϑ.

quale sarà valida anche sopra la superficie cilindrica ($r=a$) e dovrà ivi ridursi a $-\mathrm{P}(z, a)$.

« Il nostro problema è adunque ricondotto alla determinazione di $\mu(\zeta)$ dalla equazione:

$$(1)\qquad -\mathrm{P}(z, a)=\int_{-\infty}^{\infty}\mu(\zeta)\, d\zeta \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{4ad\varphi}{\sqrt{(z-\zeta)^2+4a^2-4a^2\,\mathrm{sen}^2\varphi}}\,,$$

ossia all'inversione dell'integrale definito, che compare nel secondo membro.

« Notiamo, prima di passare alla effettiva inversione, che, ponendo:

$$(2)\qquad k=\frac{2a}{\sqrt{(z-\zeta)^2+4a^2}}$$

$$(3)\qquad \mathrm{K}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\,\mathrm{sen}^2\varphi}}\,,$$

la (1) si può anche scrivere:

$$(1')\qquad -\mathrm{P}(z, a)=\int_{-\infty}^{\infty}\mu(\zeta)\,.\,2k\mathrm{K}\,.\,d\zeta\,.$$

« Per una proprietà caratteristica delle funzioni potenziali, la $\mathrm{P}(z, a)$ si annulla all'infinito, in modo anzi che: $\lim_{z=\pm\infty} |z|\,\mathrm{P}(z, a)=\mathrm{M}$ (somma algebrica delle masse potenzianti); segue da ciò e da note proposizioni di calcolo che la funzione $\cos\pi t(z-s)\,.\,\mathrm{P}(z, a)$, dove t ed s sono costanti arbitrarie, di cui la prima differente da zero, è integrabile in tutto l'intervallo $-\infty, \infty$. Si avrà pertanto dalla (1):

$$-\int_{-\infty}^{\infty}\cos\pi t\,(z-s)\,\mathrm{P}(z, a)\, dz$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\cos\pi t\,(z-s)\int_{-\infty}^{\infty}\mu(\zeta)\, d\zeta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{4ad\varphi}{\sqrt{(z-\zeta)^2+4a^2-4a^2\,\mathrm{sen}^2\varphi}}\,.$$

« Osservando che, per t diverso da zero, si riconosce, come sopra, l'integrabilità di $\cos\pi t\,(z-s)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{4ad\varphi}{\sqrt{(z-\zeta)^2+4a^2-4a^2\,\mathrm{sen}^2\varphi}}$ nell' intervallo da $z=-\infty$ a $z=+\infty$, e, ammettendo di più l'invertibilità delle integrazioni rispetto a z e a ζ (¹), si ricava:

$$-\int_{-\infty}^{\infty}\cos\pi t\,(z-s)\,\mathrm{P}(z, a)\, dz$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\mu(\zeta)\, d\zeta\int_{-\infty}^{\infty}\cos\pi t\,(z-s)\, dz\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{4ad\varphi}{\sqrt{(z-\zeta)^2+4a^2-4a^2\,\mathrm{sen}^2\varphi}}\,.$$

(¹) Ciò riescirà giustificato a posteriori, quando a suo tempo constateremo, mediante diretta sostituzione nella (1), che la trovata espressione di $\mu(\zeta)$ vi soddisfa effettivamente.

« Cambiando nel secondo integrale la variabile z in $\lambda = z - \zeta$, avremo:

$$-\int_{-\infty}^{\infty} \cos \pi t (z-s) \, \mathrm{P}(z, a) \, dz$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \mu(\zeta) \, d\zeta \left\{ \cos \pi t (\zeta - s) \int_{-\infty}^{\infty} \cos \pi t \lambda d\lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4a d\varphi}{\sqrt{\lambda^2 + 4a^2 - 4a^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} \right.$$

$$\left. - \operatorname{sen} \pi t (\zeta - s) \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sen} \pi t \lambda d\lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4a d\varphi}{\sqrt{\lambda^2 + 4a^2 - 4a^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} \right\},$$

e, siccome $\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sen} \pi t \lambda d\lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4a d\varphi}{\sqrt{\lambda^2 + 4a^2 - 4a^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} = 0$, così, posto:

$$h_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos \pi t \lambda d\lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4a d\varphi}{\sqrt{\lambda^2 + 4a^2 - 4a^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} = \tag{4}$$

$$2 \int_0^{\infty} \cos \pi t \lambda d\lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4a d\varphi}{\sqrt{\lambda^2 + 4a^2 - 4a^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} = 4 \int_0^{\infty} \cos \pi t \lambda \, . \, k \, . \, \mathrm{K} \, d\lambda \,,$$

rimarrà semplicemente:

$$-\int_{-\infty}^{\infty} \cos \pi t (z-s) \, \mathrm{P}(z, a) \, dz = h_1(t) \int_{-\infty}^{\infty} \cos \pi t (\zeta - s) \, \mu(\zeta) \, d\zeta \,. \tag{1''}$$

« La (1″) è una conseguenza della relazione (1), da cui siamo partiti e si presenta apparentemente cogli stessi caratteri, nel senso che la determinazione di $\mu(\zeta)$ equivale ancora all'inversione di un integrale definito. Però la particolare natura della funzione sotto il segno, col sussidio del teorema di Fourier, permette in questo caso di raggiungere agevolmente lo scopo.

« Riservo ad una prossima Nota gli sviluppi necessarî per il rigore del procedimento, proponendomi, come ebbi ad accennare, di aggiungervi anche qualche considerazione relativa ai fili conduttori ».

Fisica. — *Descrizione di una nuova forma di sferometro a liquido e di una buretta molto esatta* [1]. Nota di G. Guglielmo, presentata dal Socio Blaserna.

« Nel 1893 ho descritto uno sferometro [2] nel quale lo spessore che si vuol misurare viene dedotto dalla quantità di liquido che bisogna aggiungere o togliere in un largo recipiente cilindrico per produrre nel livello un innalzamento o un abbassamento uguale al suddetto spessore. A tale scopo un'astina in forma di h a gambe disuguali libera di muoversi in senso verticale riposa colla gamba più corta su un piano orizzontale fisso, mentre si

[1] Lavoro eseguito nel Gabinetto Fisico dell'Università di Cagliari. Luglio 1895.

[2] Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 1893, 1° sem., pag. 167.

conduce il livello del liquido ad affiorare esattamente all'estremità della gamba più lunga (che spesso era rivolta all'insù). S'interpone quindi fra la gamba più corta e il piano fisso, la lamina di cui si vuol misurare lo spessore, e si riduce di nuovo il livello del liquido ad affiorare esattamente all'estremità della gamba più lunga, aggiungendo un volume conveniente e misurato di liquido. Lo spessore della lamina è uguale allo spessore che ha assunto il volume di liquido aggiunto, cioè uguale ad esso volume diviso per la sezione del recipiente.

« Questo strumento molto semplice che si può facilmente costruire con apparecchi d'uso comune nei laboratori, (cioè un largo cristallizzatore, una buretta, un disco forato o una lista di vetro fissata sul cristallizzatore e su cui appoggia l'astina, un tubo fisso a un sostegno e che serve di guida alla astina, e finalmente l'astina facile a costruire in vetro o metallo) può dare in buone condizioni un grado di precisione non inferiore a quello degli sferometri a vite usuali; tuttavia esso presenta varî inconvenienti che possono diminuirne la precisione o almeno la facilità dell'uso.

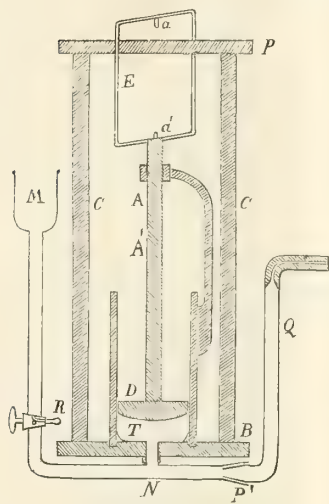
« Uno di questi è la mobilità dell'estesa superficie del liquido, inconveniente poco sensibile nel Gabinetto dove lavoravo, e che può essere diminuito circondando con un tubo di vetro la porzione di superficie dove avviene l'affioramento, o con altri mezzi noti, ma che in taluni casi potrebbe essere molto nocivo.

« Un altro inconveniente si ha nelle irregolarità e variazioni di forma della superficie libera del liquido presso le pareti. Affinchè sussista che lo spessore dello strato liquido aggiunto sia uguale al suo volume diviso per la sezione del recipiente, è necessario che lo strato abbia dappertutto lo stesso spessore verticale, ossia che la superficie libera del liquido per l'aggiunta del suddetto volume si sposti parallelamente, ciò che presso gli orli non sempre avviene.

« L'errore che ne risulta, poco sensibile nei recipienti molto larghi (p. es. di 25 cm. di diametro), può divenire relativamente grande qualora si debbano usare recipienti meno larghi. Esso può essere diminuito, coll'usare recipienti e liquidi colla superficie ben pura, coll'ottenere i due affioramenti facendo muovere la superficie del liquido nello stesso senso in entrambi i casi, col dare piccole scosse al recipiente affinchè essa superficie assuma la forma più stabile. Si potrebbe anche diminuire tale errore misurando non lo spessore totale cercato ma la differenza fra esso ed uno spessore noto e poco diverso; converrebbe allora avere una serie di lamine di spessore noto 1, 2, 3 mm. ecc. In tal modo essendo piccola la variazione del livello, si può ottenere più facilmente che le sue variazioni di forma siano nulle, o almeno producano un errore variabile regolarmente e che si può determinare. Finalmente lo stesso errore si può correggere tenendo conto dell'altezza del menisco. Tali mezzi però rendono la determinazione più lunga e più difficile

e possono lasciare il dubbio che l'errore eventualmente non sia stato completamente eliminato.

« Ho cercato dapprima di togliere o diminuire il primo inconveniente collocando sulla superficie del liquido un disco galleggiante il cui orlo era distante circa 5 mm. dalla parete, ed eliminavo o riducevo il secondo inconveniente con qualcuno dei mezzi indicati.

« In seguito osservai che usando come liquido il mercurio ed usando un recipiente esattamente cilindrico, potevo usare senza inconvenienti un disco galleggiante che riempiva quasi esattamente tutta la sezione del recipiente, pur conservando una sufficiente mobilità. Il disco toccava in qualche punto il recipiente e ne subiva un certo attrito, ma ciò era senza inconvenienti se s'impediva che il disco inclinandosi rimanesse incastrato e fisso nel recipiente; a tal uopo superiormente al disco era fissata un'asta verticale che scorreva esattamente entro un anello fisso ad altezza conveniente. Se il disco fosse abbastanza spesso e ben lavorato, l'asta guidata sarebbe superflua. Regolando convenientemente il peso del galleggiante, si può ottenere che il mercurio sia a contatto col disco in tutta l'estensione della faccia inferiore di questo e che la superficie libera del mercurio si riduca ad una striscia sottilissima (larga una frazione minima di millimetro), dimodochè le sue variazioni di forma, riescano del tutto insensibili, sia per la piccolezza di essa superficie, sia per le intense forze capillari, che tali variazioni produrrebbero.

« In queste condizioni l'apparecchio richiede per la sua costruzione un buon meccanico ed un buon tornio, affinchè il recipiente ed il disco siano esattamente cilindrici, e questo possa scorrere liberamente entro il recipiente sebbene l'intervallo fra di essi sia minimo; perciò quanto più abile sarà il meccanico e più perfetto l'utensile, tanto più preciso riuscirà l'apparecchio. Credo però che debba essere di gran lunga più facile tornire un cilindro ed un disco esattamente cilindrici, che non una vite micrometrica colla sua madrevite.

« Questo sferometro può prendere diverse forme; quello che ho fatto costruire dal meccanico dell'Istituto fisico è rappresentato in sezione nella figura 1.

« Esso consta di un tubo di ferro T, tornito, esattamente cilindrico e di 42 mm. di diametro all'interno, entro il quale scorre il disco di ferro D spesso 5 mm., che lascia tra sè e la parete un intervallo minimo, sufficiente solo perchè esso possa scorrere liberamente. Il tubo è fissato con ceralacca entro un'apposita scanalatura circolare praticata in una lastra rettangolare di

ferro B, che serve di base, ed esso porta superiormente un'appendice in ferro che termina in un anello A centrato rispetto al tubo, entro il quale scorre esattamente un'asta di ferro A′ fissata al disco, e centrata rispetto a questo. Quest'asta termina superiormente con un rettangolo E [1] di filo di ferro di 4 a 5 mm. ben rigido, il quale nel mezzo del lato superiore porta una punta d'acciaio *a* un po' smussata, verticale e rivolta all'ingiù; una punta simile e simmetrica *a′* trovasi nel mezzo del lato inferiore. Sulla base B sono avvitate due colonnette in ferro C, C′ su cui è fissata una lista di ferro P a facce piane ed orizzontali (p. es. coperte di vetro da specchi).

« Per far arrivare il mercurio nel tubo T serve il tubo a T, MNP′ che termina da un lato con un imbuto M un po' più alto del tubo T chiuso in basso da un robinetto a tre vie R, (oppure più semplicemente da un tappo smerigliato) e che in N comunica coll'interno del tubo C attraverso un foro della base. Inoltre l'estremità P′ del tubo suddetto è orizzontale, conica, smerigliata, e vi si adatta esattamente il tubo Q che termina superiormente con un corto tubo capillare, orizzontale, di 1 mm.^{2} di sezione, il cui orifizio può essere abbassato e rialzato facendo girare l'estremità smerigliata di esso tubo Q; per evitare poi che i due pezzi smerigliati si stacchino o che il suddetto orifizio s'abbassi per il solo effetto della gravità, essi sono riuniti con un corto tubo di gomma, non troppo stretto, che permette al tubo di ruotare con sufficiente attrito ma non di staccarsi. Nella figura per chiarezza il tubo MNPQ trovasi nel piano delle colonnette e della figura, mentre è più comodo che si trovi in un piano perpendicolare, poichè così il tratto orizzontale può esser più corto, ed il tutto è meno soggetto al pericolo di rottura.

« È bene che la faccia inferiore del disco B sia un po' convessa per evitare che vi rimangano aderenti bolle d'aria. Sulla faccia superiore erano collocati simmetricamente dei pesi, in modo che il peso totale del galleggiante, pesi ed asta era di circa 250 gr., cosicchè questo faceva salire il mercurio nel tubo M circa 2 cm. più in alto che non nel tubo T.

« Tale peso deve essere più che sufficiente per schiacciare completamente la superficie del mercurio, il quale deve essere a contatto colla faccia inferiore del disco in tutta l'estensione della medesima; questo peso deve però essere molto minore di quello che occorre per far filtrare il mercurio attraverso l'intervallo fra disco e parete, in modo che sia affatto esclusa la possibilità che questa filtrazione possa aver luogo.

« Sarebbe forse utile che la punta *a* fosse mobile e potesse essere fissata a diverse altezze rispetto al rettangolo mediante una vite di pressione; in tal modo si potrebbe effettuare la misura d'uno spessore facendo uso di diverse parti del tubo. Comunque, è necessario che quando la punta *a* tocca

[1] Nella figura per maggior chiarezza è rappresentato in prospettiva; esso inoltre appare troppo sottile.

il piano P, il disco si trovi ad una certa distanza p. es. 5 a 10 mm. dal fondo del tubo; inoltre è necessario che venga effettuato il raccordamento del fondo e della parete verticale del tubo T, p. es. con un po' di ceralacca, in modo che non possano rimanere imprigionate bolle d'aria nell'angolo.

« Per misurare con questo sferometro lo spessore d'una lamina si può procedere in due modi, cioè si può determinare il volume del mercurio che bisogna introdurre nel tubo T affinchè il disco si sollevi di un'altezza uguale allo spessore cercato, oppure si può determinare il volume del mercurio che bisogna togliere dal tubo T affinchè il disco s'abbassi dell'altezza suddetta; sebbene il secondo modo sia più semplice e perciò preferibile, credo opportuno esporli entrambi.

« Si stabilisce col robinetto R la comunicazione MN e si versa nell'imbuto M tanto mercurio che la punta *a* si sollevi alquanto dal piano P; si chiude la comunicazione MN e si stabilisce quella MR, di M coll'esterno, si vuota completamente di mercurio l'imbuto e i tubi dell'attuale comunicazione, scacciandolo se occorre col soffio di una pera di gomma; si abbassa l'orifizio del tubo Q finchè il mercurio ne effluisce, l'efflusso continua finchè il disco s'abbassa, cioè finchè la punta *a* riposa sul piano P.

« Lo sferometro è così preparato per la misura; si solleva l'orifizio suddetto fino alla sua posizione più alta, si stabilisce la comunicazione MN, e da un recipiente contenente mercurio e pesato, si versa mercurio nell'imbuto (avvertendo che non si formino bolle d'aria che possano venir trascinate) finchè la punta *a* si sollevi tanto da potervi introdurre sotto la lamina di cui si vuol misurare lo spessore. Allora si stabilisce la comunicazione MR e si vuota l'imbuto e la comunicazione, raccogliendone il mercurio nel recipiente pesato, si abbassa nuovamente l'orifizio Q tanto che il mercurio ne effluisca e si riceve il mercurio nel recipiente pesato. L'efflusso cessa quando la punta *a* riposa sulla lamina ed il volume o il peso del mercurio che manca nel recipiente, trovasi tutto nel tubo T dove forma uno strato di spessore uguale a quello della lamina, che si deduce quindi dividendo esso volume per l'area della sezione del tubo T. Questo modo di misurare non si può usare se l'imbuto M è chiuso da un tappo invece che dal robinetto R.

« Lo sferometro adesso è pronto per la misura dello stesso spessore nel secondo modo che è più breve e più facile. Colla mano si solleva la punta *a* solo di quel pochissimo che occorre per poter togliere di sotto la lamina, e la si lascia libera nuovamente; il disco e la punta s'abbassano ed il mercurio ricomincia ad effluire dal suddetto orifizio e continua finchè la punta *a* riposa sul piano P. Si raccoglie il mercurio effluito e si pesa o se ne misura il volume; questo formava nel tubo T uno strato di spessore uguale a quello della lamina, dividendolo quindi per l'area della sezione si avrà lo spessore cercato.

« Conviene fare alcune osservazioni. L'efflusso del mercurio dell'orifizio Q

può cessare non perchè la punta a riposi sul piano P o sulla lamina, ma perchè l'orifizio è troppo alto; ciò si scorge facilmente sia dalla sua posizione rispetto al disco, sia perchè se lo si abbassa di pochi millimetri, l'efflusso non deve ricominciare, e se lo si solleva di pochi millimetri, il mercurio deve ritirarsi di altrettanti millimetri al disotto dell'orifizio.

« Il calcolo col quale si deduce lo spessore, suppone che il disco si sia spostato parallelamente a sè stesso e che la forma della superficie libera rimanga invariata; per raggiungere sensibilmente la prima condizione giovano l'esatto adattamento del disco nel tubo e dell'asta nell'anello, però è utile che il disco nel sollevarsi o abbassarsi conservi la stessa orientazione, indicata dal rettangolo, e appoggi sempre dalla stessa parte ciò che può ottenersi con una leggiera dissimetria dei pesi o con una leggera inclinazione. Per adempire sensibilmente alla seconda condizione è bene che la pressione del mercurio nel tubo T nelle due posizioni estreme del disco, (cioè quando la punta a riposa sul piano e poi sulla lamina) sia la stessa; ciò si ottiene con molta approssimazione se l'orifizio Q si trova alla stessa altezza sopra il mercurio del tubo T in entrambe dette posizioni. Le variazioni delle capillarità nell'orifizio sono trascurabili; volendo tuttavia evitarle, si potrebbe ricurvare il tubo capillare e farlo immergere in un recipiente con mercurio pesato, che bisognerebbe sollevare e abbassare.

« Dopo effluita l'ultima goccia di mercurio questo si ritira nel tubo capillare ad una distanza di qualche millimetro dall'orifizio, variabile col peso della goccia e con altre circostanze; bisogna dunque tener conto del mercurio che viene a mancare o a trovarsi in più, e fare la correzione relativa; a tal uopo il tubo capillare deve essere calibrato almeno approssimativamente, e diviso in millimetri.

« Dopo finito l'efflusso del mercurio è utile far ruotare di un certo angolo il disco sul suo asse, e quindi riportarlo alla posizione primitiva, per assicurarsi che l'attrito non abbia influito alquanto sulla sua posizione; ho trovato invece piuttosto dannoso che utile alla concordanza dei risultati l'esercitare per un momento sul disco colle dita una certa pressione. È risultato poi assolutamente dannoso il sollevare, nel corso di una misura, il disco in modo che si stacchi dal mercurio e poi lasciarlo ricadere; è facile che rimanga qualche bolla d'aria aderente, o che la forma della superficie libera del mercurio si modifichi; forse l'inconveniente sarebbe minore o nullo, qualora la faccia inferiore del disco fosse convessa, ciò che non era nell'apparecchio da me usato, e se l'intervallo presso la parete fosse minimo. È utile ripetere parecchie volte la determinazione, ciò che si fa molto facilmente perchè il peso del mercurio effluito varia pochissimo o nulla.

« Il volume del mercurio effluito può esser misurato direttamente ed a ciò può servire opportunamente una buretta molto esatta, ed una serie di misure che descriverò in seguito. In questo caso sarebbe utile che l'area

della sezione del tubo T fosse di 10 o 100 cm.^{2}, cioè il diametro di 3,57 cm. o 11,28; così il volume in cm.^{3} del mercurio effluito esprimerebbe in millimetri lo spessore cercato. Si potrebbe altresì costruire una serie di misure prendendo per unità il volume del mercurio che effluisce per una determinata sezione del tubo T e per lo spessore di 1 mm.

« Più comodo e più esatto è il dedurre il volume del mercurio dal suo peso; non occorre una bilancia molto precisa nè una pesata molto accurata, perchè colle dimensioni dell'apparecchio descritto, l'errore di 1 cgr. produce nello spessore un errore di 0,6 μ.

« In questo caso sarebbe comodo preparare una serie di pesi aventi per unità il peso del mercurio a 15° che effluisce per 1 mm. di spessore, dimodochè il peso effluito in una misura di spessore dà in mm. lo spessore cercato; si potrebbe anche far costruire il tubo T, in modo che per lo spessore di 1 mm. effluiscano 10 o 100 grammi; la sezione cioè dovrebbe essere 7,375 o 73,75 cm.^{2} ed il diametro di 3,064 o 9,69 cm.

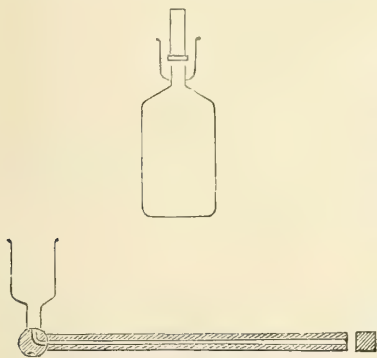
« Nel caso che si debbano misurare piccoli spessori o variazioni di spessore, può esser molto utile fare il tratto di tubo orizzontale e capillare che termina il tubo Q lungo 30 o più centimetri, ed invece di far effluire il mercurio, osservare le sue variazioni in questo tubo prodotte dal sollevarsi o abbassarsi del disco.

« Lo sferometro che ho fatto costruire era piuttosto imperfetto. Per mancanza di un buon tornio non fu possibile, malgrado l'abilità del meccanico, ottenere che il tubo T avesse esattamente la stessa sezione a diverse altezze, e l'intervallo fra disco e tubo non fu così piccolo come avrebbe potuto essere; tuttavia occorreva una pressione di 3 a 4 cm. di mercurio perchè il mercurio filtrasse a traverso l'intervallo stesso. Provai a circondare il disco con una striscia di carta velina incollatavi attorno; in tal modo esso ancora scorreva bene per due centimetri nella parte inferiore, ed una pressione di 7 cm. era insufficiente a far filtrare il mercurio attraverso l'intervallo; peraltro dopo sollevato di circa due centimetri, il disco si fermava e non era possibile farlo avanzare; e dovetti perciò togliere la striscia di carta.

« Ciononostante nella misura ripetuta molte volte dello spessore di lamine di vetro ottenni valori concordanti fino ad 1 cgr. di mercurio, (che costituiva la sensibilità massima della bilancia) cioè fino o 0,0006 mm. Prendendo la media dei valori la precisione sarebbe ancora maggiore.

« La precisione sarebbe ancora maggiore qualora il tubo T avesse maggior diametro, sia perchè ad un determinato spessore corrisponderebbe una maggior quantità di mercurio effluito, sia perchè l'errore che potrebbe provenire dall'orlo cresce in valore assoluto proporzionalmente al diametro, ma venendo poi diviso per la sezione, l'errore che ne risulta decresce in ragione inversa del diametro. Cercai di far tornire tubi lunghi 10 cm. ed aventi 10 a 12 cm. di diametro interno; ma alcuni in ghisa erano troppo duri e difficili

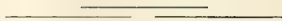
a lavorare, un altro ottenuto da una lamina di ferro curvata e fucinata, presentò nella massa del ferro varî difetti che venuti alla superficie non mi lasciavano sperare una buona riuscita.

« Sebbene il modo più esatto, più sicuro e anche più comodo, di ottenere il volume del mercurio sia quello di dedurlo dal suo peso, (specialmente se si adopera una serie di pesi la cui unità sia uguale a 13,575 gr.) può essere utile di misurare direttamente tale volume. Una discreta esattezza, non molto minore di quella che si può ottenere mediante pesata, si può avere usando per i grandi volumi una serie di misure, e per i piccoli volumi una buretta delle forme rappresentate nella figura.

« Le misure hanno forma di pallone o boccetta a pareti spesse, il collo della quale pure a pareti spesse termina con un orlo piano circondato da un tubo più largo che è saldato al primo al disotto dell'orlo oppure congiunto mediante gesso o ceralacca. Un disco di vetro ben piano tenuto con un manico forte, si adatta sull'orlo piano del recipiente e determina (in un modo già usato per la calibrazione delle campanelle) una capacità determinata del pallone.

« Volendo misurare il volume d'una certa quantità di mercurio, si riempie con esso la misura che si giudica immediatamente minòre, finchè il mercurio formi un menisco che sorpassa l'orlo; si schiaccia il menisco col coperchio, e tenendo questo aderente si capovolge il pallone per togliere l'eccesso di mercurio. Le piccole gocce che rimangono aderenti al vetro, si possono riunire dopo che si è raddrizzato il pallone, e togliere capovolgendo di nuovo il pallone chiuso se non si riesce in altro modo; l'eccesso di mercurio si misura con un pallone minore oppure colla buretta.

« Questa consta di un tubo A di 1 a 3 mm^2 di sezione, di 1 cm.^{3} di capacità fra l'estremità libera e il robinetto chiuso, diviso in centesimi di cm.^{3}; R è un robinetto il cui maschio ha due fori perpendicolari che giungono solo fino all'asse formando un L, ed una scanalatura longitudinale. Volendo determinare il volume d'una certa quantità di mercurio, si dispone il robinetto come è nella figura, si versa il mercurio nell'imbuto, e si chiude l'estremità libera del tubo (la quale è spianata) con un dischetto piano. Il mercurio sale nel tubo scacciando l'aria attraverso gl'interstizî fra disco e tubo che esso non può attraversare. Quando il tubo è pieno, si gira il robinetto di 90° a sinistra e si raccoglie il mercurio che effluisce per la scanalatura, e lo si conserva se occorre per una nuova misura. Si ripete l'operazione finchè v'è mercurio nell'imbuto, p. es. n volte quando esso non è sufficiente per riempire il tubo, si legge il suo volume nel tubo graduato, sia p. es. a, il volume cercato sarà n cm.$^3 + a$.

« È necessario che ogni volta che si vuota il tubo, ciò avvenga interamente, senza che rimanga una parte aderente e per capillarità; occorre perciò soffiare dall'estremità libera con una pera di gomma. Invece della chiusura col dischetto smerigliato si può terminare l'estremità libera del tubo con una apertura sottilissima, tale da impedire al mercurio, che ha poca pressione, di oltrepassarla ».

P. B.

INDICE DEL VOLUME IV, SERIE 5ª. — RENDICONTI

1895 — 2° Semestre.

INDICE PER AUTORI

INDICE DELLE MATERIE

ERRATA-CORRIGE

Pag. 95 linee 13, 14, ove è detto: *e si conservano costanti i parametri, i moti interni non si mantengono isociclici* leggi: *e si conservano costanti i parametri, si può scegliere il moto iniziale di rotazione in modo che i moti interni non si mantengano isociclici.*

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCII.

1895

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Volume IV.° — Fascicolo 1°

2° Semestre

Comunicazioni pervenute all'Accademia prima del 7 luglio 1895.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1895

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume, due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, sono portate a 8 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 25 agli estranei · qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messa a carico degli autori

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-IV. (1895) 2° Sem. Fasc. 1°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-IV. (1895). — Fasc. 1°-3°.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume è per tutta l'Italia di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*
ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Comunicazioni pervenute all'Accademia prima del 7 luglio 1895.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

CORRISPONDENZA

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCII

1895

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Volume IV.° — Fascicolo 2°

2° Semestre

Comunicazioni pervenute all'Accademia prima del 21 luglio 1895.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1895

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume, due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, sono portate a 8 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 25 agli estranei: qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messa a carico degli autori

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali storiche e filologiche*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali*
Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche*
Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali*
Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche*
Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. I-IV. (1895) 2° Sem. Fasc. 2°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche*
Vol. I-IV. (1895). — Fasc. 1°-3°.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURAL

DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti **editori-librai:**

ERMANNO LOESCHER & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*
ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Comunicazioni pervenute all'Accademia prima del 21 luglio 1895.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

PERSONALE ACCADEMICO

ELEZIONI DI SOCI

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCII.

1895

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Volume IV.° — Fascicolo 3°

2° Semestre

Comunicazioni pervenute all'Accademia prima del 4 agosto 1895.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1895

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume, due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, sono portate a 8 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 25 agli estranei · qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a)* Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b)* Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c)* Con un ringraziamento all'autore. - *d)* Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messa a carico degli autori

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-IV. (1895) 2° Sem. Fasc. 3°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-IV. (1895). — Fasc. 1°-5°.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume è per tutta l'Italia di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*
ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Comunicazioni pervenute all'Accademia prima del 4 agosto 1895.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

CORRISPONDENZA

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCII.

1895

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Volume IV.° — Fascicolo 4°

2° SEMESTRE

Comunicazioni pervenute all'Accademia prima del 18 *agosto* 1895.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1895

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume, due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, sono portate a 8 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 25 agli estranei - qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz' altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell' art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all' autore. - *d*) Colla semplice proposta dell' invio della Memoria agli Archivi dell' Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall' art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica nell' ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L' Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messa a carico degli autori

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. I-IV. (1895) 2° Sem. Fasc. 4°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-IV. (1895). — Fasc. 1°-6°.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume è per tutta l'Italia di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*
ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Comunicazioni pervenute all'Accademia prima del 18 agosto 1895.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCII

1895

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Volume IV.° — Fascicolo 5°

2° SEMESTRE

Comunicazioni pervenute all'Accademia prima del 1° settembre 1895.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1895

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume, due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, sono portate a 8 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 25 agli estranei qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messa a carico degli autori

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª Transunti.
2ª Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — Transunti. Vol. I-VIII. (1876-84).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — Rendiconti Vol. I-VII. (1884-91).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — Rendiconti *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-IV. (1895) 2º Sem. Fasc. 5º.
Rendiconti *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-IV. (1895). — Fasc. 1º-6º.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI
DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume è per tutta l'Italia di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

Ermanno Loescher & C.º — *Roma, Torino* e *Firenze.*
Ulrico Hoepli. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

RENDICONTI — Settembre 1895.

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Comunicazioni pervenute all'Accademia prima del 1° settembre 1895.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCII

1895

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Volume IV.° — Fascicolo 6°

2° SEMESTRE

Comunicazioni pervenute all'Accademia prima del 15 settembre 1895.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1895

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume, due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, sono portate a 8 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 25 agli estranei qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messa a carico degli autori

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. I-IV. (1895) 2° Sem. Fasc. 6°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-IV. (1895). — Fasc. 1°-6°.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume è per tutta l'Italia di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*
ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Comunicazioni pervenute all'Accademia prima del 15 settembre 1895.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCII.

1895

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Volume IV.° — Fascicolo 7°

2° SEMESTRE

Comunicazioni pervenute all'Accademia prima del 6 ottobre 1895.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1895

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume, due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, sono portate a 8 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 25 agli estranei: qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell' art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all' autore. - *d*) Colla semplice proposta dell' invio della Memoria agli Archivi dell' Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall' art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica nell' ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messa a carico degli autori

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali*
Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali*
Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. I-IV. (1895) 2° Sem. Fasc. 7°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche*
Vol. I-IV. (1895). — Fasc. 1°-6°.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume è per tutta l'Italia di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*
ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Comunicazioni pervenute all'Accademia prima del 6 ottobre 1895.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

PERSONALE ACCADEMICO

CORRISPONDENZA

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCII

1895

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Volume IV.° — Fascicolo 8°

2° SEMESTRE

Comunicazioni pervenute all'Accademia prima del 20 ottobre 1895.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1895

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume, due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, sono portate a 8 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 25 agli estranei · qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messa a carico degli autori

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª Transunti.
2ª Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali*
3ª Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — Transunti. Vol. I-VIII. (1876-84).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-XIII.

Serie 4ª — Rendiconti Vol. I-VII. (1884-91).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. I-VII.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-X.

Serie 5ª — Rendiconti *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. I-IV. (1895) 2° Sem. Fasc. 8°.
Rendiconti *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche*
Vol. I-IV. (1895). — Fasc. 1°-8°.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume è per tutta l'Italia di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

Ermanno Loescher & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*
Ulrico Hoepli. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

RENDICONTI — Ottobre 1895.

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Comunicazioni pervenute all'Accademia prima del 20 ottobre 1895.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCII.

1895

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 17 *novembre* 1895.

Volume IV.° — Fascicolo 9°

2° Semestre

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1895

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume, due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, sono portate a 8 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 25 agli estranei· qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messa a carico degli autori.

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. I-IV. (1895) 2° Sem. Fasc. 9°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche*
Vol. I-IV. (1895). — Fasc. 1°-8°.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI
DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume è per tutta l'Italia di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*
ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 17 novembre 1895.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

MEMORIE DA SOTTOPORSI AL GIUDIZIO DI COMMISSIONI.

PERSONALE ACCADEMICO

PRESENTAZIONE DI LIBRI

CORRISPONDENZA

(*) Queste Note saranno pubblicate nei prossimi fascicoli.

ERRATA-CORRIGE

Pag. 95 linee 13, 14, ove è detto: *e si conservano costanti i parametri, i moti interni non si mantengono isociclici* leggi: *e si conservano costanti i parametri, si può scegliere il moto iniziale di rotazione in modo che i moti interni non si mantengano isociclici.*

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCII.

1895

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 24 novembre 1895.

Volume IV.° — Fascicolo 10°

2° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

1895

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume, due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, sono portate a 8 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 25 agli estranei · qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messa a carico degli autori.

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-IV. (1895) 2° Sem. Fasc. 10°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-IV. (1895). — Fasc. 1°-8°.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume è per tutta l'Italia di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.° — ***Roma, Torino*** e ***Firenze.***
ULRICO HOEPLI. — ***Milano, Pisa*** e ***Napoli.***

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 24 novembre 1895.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

(*) Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCII.

1895

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 1° dicembre 1895.

Volume IV.° — Fascicolo 11°

2° Semestre

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1895

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume, due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, sono portate a 8 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 25 agli estranei · qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il avoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messa a carico degli autori.

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª Transunti.
2ª Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — Transunti. Vol. I-VIII. (1876-84).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche*
Vol. I-XIII.

Serie 4ª — Rendiconti Vol. I-VII. (1884-91).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. I-VII.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-X.

Serie 5ª — Rendiconti *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. I-IV. (1895) 2° Sem. Fasc. 11°.
Rendiconti *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-IV. (1895). — Fasc. 1°-8°.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI
DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume è per tutta l'Italia di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

Ermanno Loescher & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*
Ulrico Hoepli. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 1º dicembre 1895.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

PRESENTAZIONE DI LIBRI

CORRISPONDENZA

(*) Queste Note saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCII

1895

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche matematiche e naturali.

Seduta del 15 dicembre 1895.

Volume IV.° — Fascicolo 12°
e Indice del volume.

2° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1895

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche. matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume, due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, sono portate a 8 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 25 agli estranei qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messa a carico degli autori.

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali*
Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche*
Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali*
Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche*
Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. I-IV. (1895) 2° Sem. Fasc. 12°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-IV. (1895). — Fasc. 1°-10°.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI
DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*
ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 15 dicembre 1895.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI